

Fizikai geodézia és gravimetria / 20.**AZ ISMÉTELT GEODÉZIAI MÉRÉSEK GEODINAMIKAI ÉRTELMEZÉSE.**

Számos földfizikai folyamat a földi *nehézségi erőter időbeli változásait* okozza. A különböző mértékű és sebességű változásoknak meg kell nyilvánulnia a nehézségi vektor irányának és nagyságának, következésképpen a szintfelületek helyzetének, alakjának, a helyi függőleges irányának és a földfelszíni pontok nehézségi értékének megváltozásában is.

Ilyen körülmények között szükségessé válik a helymeghatározás hagyományos alapelveinek felülvizsgálata, ezért a továbbiakban most azt fogjuk megnézni, hogy a nehézségi erőter bármilyen okból származó időbeli megváltozása milyen hatást gyakorol a földfelszíni pontok helyzetét jellemző *geodéziai helymeghatározó adatokra*.

A nehézségi erőterre vonatkozó számszerű ismereteinket nehézségi mérések által szerezzük. Feladatunk megoldása során szükségszerűen merül fel tehát az a további kérdés: hogyan viselkedik a *földfelszínen mérhető nehézségi érték* (nehézségi térerősség) az időben változó erőterben.

A természetes koordináták és változásaik

A földfelszíni pontokban értelmezett Φ , A szintfelületi földrajzi koordinátái és W potenciálértéke, vagy a magassági alapszintfelülethez (geoidhoz) viszonyított $W - W_0$ potenciálkülönbsége, ill. H (tengerszintfeletti) magassága által alkotott helymeghatározó adatok értékhármását együttesen, tömören a pont *természetes koordinátáinak* nevezzük. A geodéziában használt helymeghatározó adatok közül ők állnak legszorosabb kapcsolatban a Föld nehézségi erőterével, így a továbbiakban először az ő időbeli változásaikkal fogunk foglalkozni.

A természetes koordináták megfelelő geodéziai mérési módszerrel (földrajzi helymeghatározás és szabatos magasságmeghatározás) gyakorlatilag számszerűen meghatározhatók. (Kivétel a pont W potenciálértéke, amit egyelőre mérni nem tudunk, ezért használjuk helyette a mérhető $W - W_0$ potenciálkülönbséget, ill. a H (tengerszintfeletti) magasságot.)

Bár közvetlenül nem helymeghatározó mennyiség, de a nehézségi erőter szerkezetének (eloszlásának) és időbeli változásainak tanulmányozásakor a \mathbf{g} nehézségi vektor iránya (a helyi függőleges iránya) mellett nélkülözhetetlen további fontos adat ennek nagysága, a nehézségi térerősség g abszolút értéke is, amely számszerűen megegyezik a szabadon eső test gyorsulásával, vagy más szóval a nehézségi gyorsulással, és megfelelő módszerrel ugyancsak igen nagy megbízhatósággal mérhető.

Az említett méréseket kellő szabatosággal a szilárd Föld fizikai felszínén kijelölt (és tartósan állandósított) pontokban tudjuk elvégezni, így a pontok természetes koordinátái és nehézségi értéke a földfelszín alakjára vonatkozó *geometriai* és a földi

nehézségi erőterhez kapcsolódó *fizikai* információkat tartalmazó (kettős jellegű) mennyiségek. Részletes vizsgálatuk során mindkét jellegre tekintettel kell lenni.

A geodézia kezdeti fejlődési szakaszát mind geometriai, mind fizikai oldalról a *statikai szemlélet* jellemezte, amikor is mind a Föld geometriai alakját, mind a nehézségi erőterét *időben állandónak* tekintették. Ennek értelmében valamely földfelszíni pont valamikor meghatározott természetes koordinátáit és nehézségi értékét egyszer és mindenkorra változatlan (konstans) mennyiségként fogadták el. Esetleges ismételt mérésekből adódó eltérések magyarázatuként csak a mérési hibák (véletlen, szabályos vagy esetleg ún. durva hibák) jöhettek szóba.

A társadalom és a tudomány következő fejlődési fokán – jelenlegi évtizedeink gyakorlatának megfelelően – elfogadottá vált a *földfelszín alakváltozásának* lehetősége. Ennek fizikai háttereként a kéregdarabok mozgása került előtérbe. Így napjaink általános gyakorlataként a természetes koordináták közül a magasság tapasztalt δH időbeli változását *függőleges*, a szintfelületi szélesség és hosszúság értékében észlelt $\delta\Phi$ és $\delta\Lambda$ időbeli változásokat pedig *vízszintes kéregmozgásként* értelmezik. (Az egyes mennyiségek *időbeli* változását a továbbiakban következetesen a δ -val fogjuk jelölni.) Mivel ezek a mennyiségek nem csupán a Föld geometriai alakjához, hanem nehézségi erőteréhez is kötődnek, az előbbi értelmezés *hallgatólagosan magában hordja az erőter időbeli állandóságára vonatkozó alapfeltevést*. Mivel a koordináta-változások és az erőter kapcsolata ily módon nem kerül szóba, ezt az értelmezést *kinematikai szemléletnek* nevezhetjük.

Ennek ellentmondásosságára jellemző, hogy ugyanekkor napjainkban örvendetes módon egyre több helyen sorra kerülő ismételt abszolút nehézségi mérések alapján meghatározott δg időbeli változásokat – a jelenlegi gyakorlat szerint – a nehézségi erőter időbeli változásaként értelmezik, tudomásul véve ez utóbbinak a lehetőségét is. Ez a fajta értelmezés azonban *hallgatólagosan magába foglalja azt a feltételezést, hogy az ismételt mérések között az állomásnak a Föld tömegéhez viszonyított térbeli (geometriai) helyzete változatlan maradt*, ami más szóval az előbbi bekezdésben említett geometriai alakváltozások, felszín- vagy kéregmozgások lehetőségének kizárását jelenti. Mindkét fajta értelmezés – sajnálatos módon – együtt, egymás mellett él a földtudományok mai gyakorlatában, pedig *egyik a másikat kizárja*.

Ennek az ellentmondásnak a feloldását célozza a továbbiakban ismertetendő azon integrált *geodéziai-geodinamikai* szemléleti mód, amelyben *egyidejűleg elfogadjuk mind a geometriai alakváltozások (felszínmozgások), mind pedig a nehézségi erőter időbeli változásának lehetőségét*. Ennek értelmében az észlelt koordináta-, illetve térerősség-változások mindkét hatás eredőjeként lépnek fel, és így mindkét hatást együttesen tartalmazzák. Meg kellett találni a kétféle hatás szétválasztásának módszerét, azaz az észlelt koordináta- és nehézségi változásokból helyes fizikai értelmezéssel meghatározni a *valódi felszínmozgás* és a *tényleges erőterváltozás* mértékét. Ebből a célból meg kell ismernünk a természetes koordináták és az erőter időbeli változásának kapcsolatát.

Megjegyezzük, hogy a továbbiakban következetesen *felszínmozgásról* beszélünk, a gyakran használt *kéregmozgás* kifejezés helyett, hiszen a méréseinket a *földfelszínen* végezzük, és nem tudjuk, hogy ennek eredményei a teljes kéregdarabok mozgását is jellemzik-e.

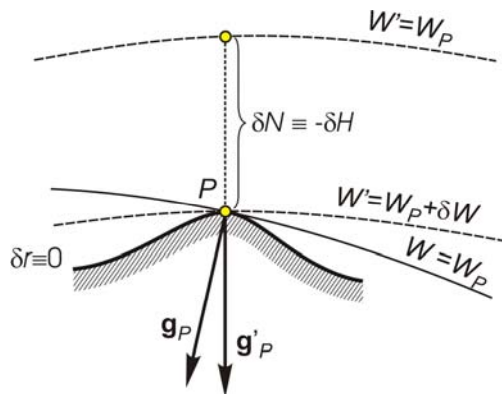
A magasság és a nehézségi térerősség időben változó erőterben

Annak érdekében, hogy a viszonyokat élesen kisarkítva tanulmányozhassuk, először néhány egyszerű, de egyben fizikailag szélsőséges lehetőségeket képező *földmodellre* vonatkozóan mutatjuk be a magasság és a nehézségi térerősség időbeli változásával kapcsolatos összefüggéseket.

Először olyan egyszerű, de mégis *jellegzetes modelleket* mutatunk be, melyek segítségével egyszerű eszközökkel, de meggyőzően tudjuk a feladat megoldásának lényegét szemléltetni.

Merev kérgű földmodell

A merev kérgű földmodell felszínének kis darabját az 1. ábra mutatja. A felszíni P pont kezdeti t időpontbeli potenciálértéke W_p és a nehézségi térerősség vektora ugyanakkor \mathbf{g}_p . Az erőter valamely δt időtartam alatt bekövetkező megváltozását a továbbiakban célszerűen a δW skalár értékkel, az erőter potenciáljának megváltozásával fogjuk jellemezni. Így a $t' = t + \delta t$ időpontban a P pont megváltozott potenciálértéke $W' = W_p + \delta W$ lesz, a nehézségi vektor ugyanakkor \mathbf{g}'_p -re változik.



1. ábra. A merev kérgű földmodell

Általánosság kedvéért fel kell tételezzük, hogy az erőter δW megváltozása a hely függvénye, ezért ennek következtében megváltozik az erőter iránya és szintfelületeinek alakja is. A kezdeti helyzetében a P ponton átmenő szintfelület pedig a tér azon helyére toódik, ahol a megváltozott W' potenciálfüggvény veszi fel a kezdeti W_p értéket. A magasságszámítás szempontjából éppen ez a

$$\delta N = \frac{\delta W}{g} \quad (1)$$

szintfelület-eltolódás lényeges. Kis változások és a Föld méreteihez viszonyított kis magasságok esetében úgy tekinthetjük, hogy a P pont függőlegesében az alapul választott szintfelület is δN mértékű eltolódást szenvedett, aminek értelmében a felszíni P pont kezdeti H magassága

$$\delta H = -\delta N \quad (2)$$

mértékben megváltozik, pusztán az erőter megváltozásának következtében, annak ellenére, hogy merev kérgű földmodellünk esetében *valóságos felszínmozgás nem jöhet szóba* ($\delta \mathbf{r} \equiv 0$, ahol \mathbf{r} a helyvektor jelölése, $\delta \mathbf{r}$ ennek időbeli változása). Már ez

az eredmény felhívja a figyelmet arra, hogy a felszíni pontok észlelt magasságváltozása időben változó erőterben nem jelent okvetlenül felszínmozgást is! A δH magasságváltozást tekinthetjük az erőter szintfelületeihez viszonyított relatív felszínmozgásnak, szemben a pont jelenleg $\delta r = 0$ értékű valódi felszínmozgásával.

A nehézségi térerősség abszolút értékének $\delta g = g'_P - g_P$ megváltozása és a δW potenciálváltozás között a potenciál fogalmából és a $dV = k dM / \ell$ értelemszerű alkalmazásából következő

$$\frac{\partial}{\partial H} \delta W = -\delta g \quad (3)$$

egyszerű összefüggés áll fenn a tér rögzített P pontjában. Ez élesen mutatja, hogy a nehézségi érték és a potenciál (vagy az (1) és a (2) összefüggésen keresztül a nehézségi érték és a magasság) megváltozása között általában nincs egyszerű arányosság. Kapcsolatuk csak differenciális összefüggéssel fejezhető ki.

Ha mérési eredmények alapján az erőter változását kifejező potenciálváltozás $\delta W = \delta W(\mathbf{r})$ függvényének meghatározását tűzzük ki célul, akkor a (3) észlelt δg értékekkel erre közvetve alkalmas, bár nem valódi differenciálegyenlet δW meghatározására, mert a mérési eredmények csak zárt felületen (és nem a teljes térben) ismertek. Így a (3) *peremfeltételt* képez a potenciálmélet 2. *peremérték-feladatának* megoldásához, a δg mérési eredményekkel, mint *ismert peremértékekkel*.

A feladat megoldása kétféle alakban is nyerhető. Egyik megoldásként a

$$\delta W = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g S'(\psi) d\sigma \quad (4)$$

felületi integrál szolgál, ahol R a földmodell helyettesítő gömb sugara, σ és $d\sigma$ az egységgömb felszíne, illetve felületeleme, ψ a futópont és a mérési hely gömbi szögtávolsága, és

$$S'(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (5)$$

a Stokes-féle függvényhez hasonló, de erre a földmodellre vonatkozó függvény, amelyben $P_n(\cos \psi)$ az n -ed fokú Legendre-polinom, és $n = 2, 3, \dots$ pozitív egész számok. (Megjegyezzük, hogy az összegezést azért kell $n = 2$ -től kezdeni, mert feltételezzük a Föld tömegének és a tömegközéppont helyzetének változatlanóságát.)

A (4) megoldás már mutatja, hogy *egyetlen δg mérési eredményből még semmiféle következtetést nem lehet levonni* az erőter változására vonatkozóan, ehhez (elvileg) az egész peremfelületen szükség van mérési eredményekre.

Másik megoldásként a δW függvény (r, ϑ, λ) gömbi koordináták szerinti végtelen gömbfüggvény-sorát kaphatjuk a

$$\delta W = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\delta C_{n,m} \cos m\lambda + \delta S_{n,m} \sin m\lambda) P_{n,m}(\cos \vartheta) \quad (6)$$

alakban, ahol kM a geocentrikus gravitációs állandó, a a földi ellipszoid fél nagytengely hossza, $P_{n,m}(\cos \vartheta)$ az n . fokú, m . rendű Legendre függvény, $\delta C_{n,m}$ és $\delta S_{n,m}$ a potenciálfüggvény gömbfüggvény-sorában szereplő *együtthatók időbeli változása*. Ez a megoldás feltételezi, hogy δW csak a tömegátrendeződésből származó vonzási potenciálok különbségeként előálló harmonikus függvény, és a megoldást csak a tömeg külső terére kívánjuk értelmezni.

A gömbfüggvény-együtthatók számszerű meghatározásához a (6) megoldást a (3) peremfeltételbe beírva, a $\frac{\partial}{\partial H} \approx \frac{\partial}{\partial r}$ közelítéssel a

$$\delta g = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\delta C_{n,m} \cos m\lambda + \delta S_{n,m} \sin m\lambda) P_{n,m}(\cos \vartheta) \quad (7)$$

alakú *közvetítő egyenletet* nyerjük, amiből a mérési eredményekkel javítási egyenletek képezhetők, és kellő számú egyenletből n_{\max} fokig terjedő véges számú $\delta C_{n,m}$, $\delta S_{n,m}$ együttható számértéke meghatározható. Ily módon a (6) segítségével az erőtváltozások, illetve az (1) alapján a szintfelület-eltolódások globális eloszlása jól tanulmányozható.

Ennek a modellnek *különleges esete*, ha a földmodellt R sugarú, *gömbszimmetrikus tömegeloszlású gömbnek* tekintjük, és az erőter változását a gömb középpontjában képzelt pontszerű *belső mag áthelyeződéséből* származtatjuk. Ebben, és csakis ebben, az egyszerű, különleges esetben a (3) helyett fennáll a

$$\frac{2}{R} \delta W = \delta g \quad (8)$$

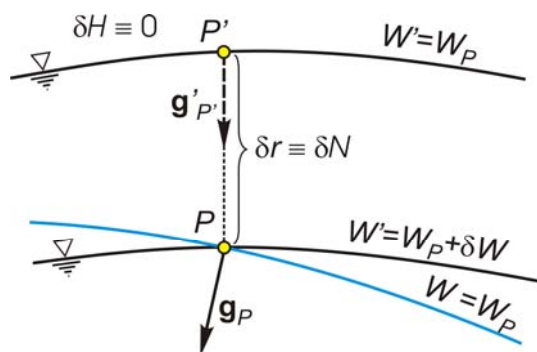
és δW -re megoldásként a

$$\delta W = \frac{R}{2} \delta g \quad (9)$$

egyszerű arányosság.

Ideális folyadékkal borított földmodell

Az ideális folyadékkal borított földmodell szabad felszíne megegyezik potenciáljának egyik, esetünkben a P ponton áthaladó $W = W_P$ potenciálértékű szintfelületével (2. ábra). A nehézségi térerősség vektora ugyanitt \mathbf{g}_P .



2. ábra. Az ideális folyadékkal borított földmodell

Az erőter (potenciáljának) δW megváltozásával a kezdeti helyzetben a P ponton áthaladó szintfelület és vele együtt a földmodellt borító szabad folyadékfelszín függőleges értelemben eltolódik. A P pont kezdeti helyzetéből a folyadékfelszínnel együtt a P' helyzetbe kerül, ahol a nehézségi vektor $\mathbf{g}'_{P'}$. A szintfelület δN függőleges eltolódása most is az (1)-ből számítható, de jelen esetben ez megegyezik a $\overline{PP'} \equiv \delta \mathbf{r}$ valódi felszínmozgással, ugyanakkor a pont magasságváltozása $\delta H = 0$, hiszen rajta maradt a kezdeti helyzetben is rajta keresztülmenvő szintfelületen (vagy más szóval

potenciálértéke és így az alapszintfelülethez viszonyított potenciálkülönbsége nem változott).

Ez a modell megint azt támasztja alá, a másik szélsőséges esetben, hogy *az észlelt (zérus vagy véges) magasságváltozások nem jellemzők a valódi mozgásvizonyokra!* Véleményünk szerint a valódi Föld felszínén észlelt zérus vagy közel zérusértékű magasságváltozások inkább arra mutatnak, hogy a Föld szilárd tömege is közel folyadékszerűen viselkedik hosszú periódusú vagy szekuláris erőterváltozások esetén, mint arra, hogy felszíni mozgások, alakváltozások nincsenek. Ha vizsgáljuk az elmozduló földfelszínen a nehézségi térerősség abszolút értéke $\delta g^* = g'_{p'} - g_p$ megváltozásának kapcsolatát az erőter változásával, akkor a

$$\frac{\partial}{\partial H} \delta W - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial H} \delta W = -\delta g^* \quad (10)$$

összefüggésre jutunk, ami most δW meghatározására a potenciálemélet 3. *peremérték-feladatának* megoldásához ad *peremfeltételt* a δg^* mérési eredmények (*peremértékek*) és a keresett δW potenciálváltozás-függvény között.

A megoldás egyik módja most is a felületi integrálás, aminek eredményeként ez esetben a

$$\delta W = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g^* S(\psi) d\sigma \quad (11)$$

alakra jutunk, ahol $S(\psi)$ a *Stokes-féle* függvény.

Ez az eredmény azt mutatja, hogy ha a *valódi* Föld esetében a *Stokes-féle* eredeti integrálképletbe a Δg nehézségi rendellenességek helyett a δg^* *időbeli változásokat* írjuk, és a *Stokes-függvénnyel* alkotott szorzatokat integráljuk, akkor az *erőter változását* (vagy az (1) alapján a szintfelületek eltolódását) csak akkor kapjuk helyesen, ha a valóságos földfelszín *folyadékszerűen viselkedik*, azaz ugyanakkor $\delta H = 0$ magasságváltozásokat észlelünk.

Ellenkező esetben ez a (11) a valódi Földre nem alkalmazható, helyette más megoldást kell keresnünk. Érvényes azonban a (11) a valódi földfelszín *tengerekkel borított részén*.

Természetesen ez esetben is fennáll a másik megoldási lehetőség a (7) gömbfüggvénysor alakjában, csak most az ismeretlen együtthatók kiszámítása érdekében a (7)-et és a

$$\frac{\partial}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial r} \quad (12)$$

közelítéssel számított deriváltját a (10)-be kell beírni, és így jutunk a megfelelő közvetítő egyenletre és javítási egyenletrendszerre.

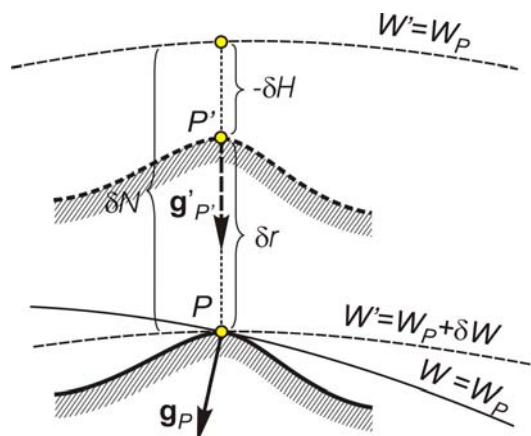
Ideálisan rugalmas földkéreg

Harmadik modellként azt az esetet vizsgáljuk, ha **a szilárd földkéreg ideálisan rugalmas anyagként viselkedik** (3. ábra). Ez esetben a földfelszín és a rajta kijelölt P pont az erőter δW megváltozásával járó δN szintfelület-eltolódást δr rugalmas alakváltozással részben követi, és a P' helyzetbe kerül. A δN szintfelületeltolódás – modelltől teljesen függetlenül – most is az (1)-ből számítható. Tételizzük fel, hogy a rugalmas kéreg anyaga a *Love-féle* rugalmassági elméletet követi, és vezessük be a

hosszú periódusú és szekuláris változásokra a h^* és k^* Love-féle számokat, valamint a

$$D = 1 - h^* + k^* \quad (13)$$

kombinációjukat.



3. ábra. A rugalmas kérgű földmodell

A rugalmassági elméletnek megfelelően a *valódi felszínmozgás* ez esetben a

$$\delta r = \frac{h^*}{1 + k^*} \delta N \quad (14)$$

összefüggésből nyerhető.

Ugyanakkor, mivel a földfelszíni pont a kezdetben rajta átmenő szintfelületről lemozdult,

$$\delta H = -\frac{D}{1 + k^*} \delta N \quad (15)$$

magasságváltozást észlelünk.

Mindkét utóbbi mennyiség arányos a szintfelület δN eltolódásával, és számítható, ha a Love-féle számok megfelelő (erre az esetre érvényes) értékét ismerjük. A (14) és a (15) összehasonlítása élesen felhívja megint a figyelmet arra, hogy a magasságváltozás a valódi felszínmozgásnak még csak első *közelítő értékeként sem* fogható fel, hiszen eleve ellentett előjelű a modellünk esetében!

Ennek a megállapításnak az érzékeltetésére számpéldát is bemutatunk. Ha például valamely pont magasságváltozására a mindenkori középengerszínhez kapcsolt ismételt szintezés eredményeként $\delta H = -30$ mm-t kapunk, akkor a mai gyakorlat szerint 30 mm *süllyedésre* gondolnánk. Ha azonban a rugalmas elmélet alapján – jobb hiányában az árapály megfigyelésből ismert Love-féle számokat elfogadva – $h^* = 0.60$ és $k^* = 0.30$ értékkel számolva a (14)-ből

$$\delta r = -\frac{h^*}{D} \delta H = +26 \text{ mm} \quad (16)$$

eredményre jutunk, ami a felszín kezdeti helyzetéhez viszonyított 26 mm-es *emelkedését* mutatja a valóságban (feltételezve, hogy pusztán rugalmas alakváltozás jött létre). A Love-féle számok ily módon felvett értéke természetesen vitatható, de ez

az előjelet nem változtatja meg (ugyanis $0 \leq h^* \leq 1$, tehát a h^*/D arány lényegesen pozitív mennyiség).

A földfelszíni nehézségi érték δg^* megváltozása és az erőter δW potenciálváltozása között ehhez a modellhez a

$$\frac{\partial}{\partial H} \delta W - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial H} \frac{h^*}{1+k^*} \delta W \quad (17)$$

peremfeltételt lehet felállítani, aminek segítségével ismét a 3. *peremérték-feladat* megoldásaként most a

$$\delta W = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g^* S^e(\psi, h^*, k^*) d\sigma \quad (18)$$

egységgömb felületi integrálképletre jutunk, ahol

$$S^e(\psi, h^*, k^*) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1 - \frac{2h^*}{1+k^*}} P_n(\cos\psi) \quad (19)$$

a Stokes-féle függvényhez hasonló, de a Love-féle számokat is tartalmazó függvény.

Természetesen ennek a modellnek az esetében is fennáll a gömbfüggvény-soros megoldás lehetősége, hasonlóan az előbbi modellhez.

A bemutatott modellek természetesen szélsőséges, illetve ideális esetek, de annál élesebben mutattak rá egyes alapvető és általános összefüggésekre.

A továbbiakban térjünk rá a **valóságos Föld** esetére. A következőkben bemutatjuk, hogy hogyan viselkedik a *magasság és a földfelszíni nehézségi térerősség a Föld változó erőterében*.

A feladat megoldása valóságos Földünk esetében annyiban összetettebb, hogy a szilárd földfelszín az erőter változásait feltehetően valamilyen mértékben *rugalmas alakváltozással* követi (a 4. ábrán a $\bar{P}(\bar{P}')$ szakasz), de az így keletkező elmozdulásra még ráakódhatnak *egyéb (geológiai stb.) eredetű felszínmozgások* is (a 4. ábrán a $\bar{P}'(\bar{P}')$ szakasz), és ezek eredőjeként jut a földfelszín a P' helyzetbe. (Megjegyezzük, hogy a „valamilyen mértékű rugalmas alakváltozás” határesetként a teljesen merev és a folyadékszerű alakváltozást is magába foglalja.) A szintfelületek *δN függőleges eltolódása*, mint eddig is, modelltől függetlenül, az (1)-nek megfelelő egyszerű arányban áll az erőter δW megváltozásával.

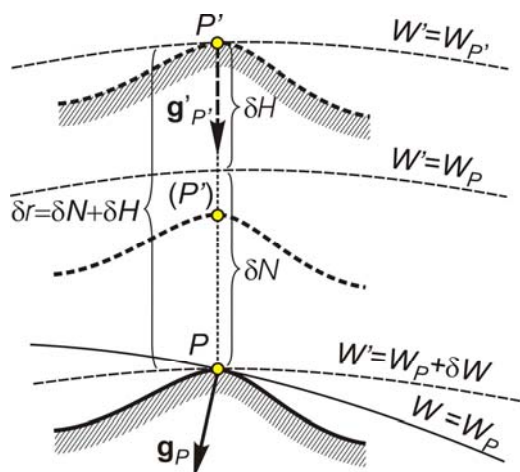
A földfelszíni pont ez esetben is általában lemozdul a kezdeti helyzetben rajta átmenő szintfelületről, és így δH *magasságváltozás* is bekövetkezik. Míg azonban a bemutatott modellek esetében ez utóbbi egyértelmű függvénykapcsolatban állt az erőterváltozással (beleértve a zérusértékű függvényt is), addig a Föld esetében semmiféle ilyen jellegű matematikai kapcsolat nem állítható fel. Így *a magasságváltozást a Föld esetében számítani nem lehet; de geodéziai módszerekkel mérni igen*. Így ezt a továbbiakban *mérési eredménynek* tekintjük.

A 4. ábráról leolvashatóan, a mért magasságváltozások messzemenően nem jellemzik a valódi mozgásviszonyokat. A *valódi függőleges felszínmozgást* a

$$\delta r = \delta N + \delta H \quad (20)$$

összegeből kell helyesen számítani, vagyis a mért magasságváltozáshoz hozzá kell adni a szintfelületek (így az alap-szintfelület) függőleges eltolódását. Így jutunk a helyes

eredményre. Modellszámításokból tudjuk, hogy ez utóbbi hatás egyáltalán nem elhanyagolható, mert a földfelszíni nehézségi érték néhányszor 10^{-8} N/kg/év térerősség-változás (vagy néhány $\mu\text{Gal}/\text{év}$ ($10^{-8} \text{ms}^{-2}/\text{év}$) gyorsulás-változás) esetén néhány mm/év nagyságrendet ér el, ami éppen az eddig tapasztalt legnagyobb magasságváltozások nagyságrendje, és így a *valódi felszínmozgásnak még az előjele is ellentett lehet a magasságváltozáshoz képest.*



4. ábra. A valóságos Föld függőleges felszínmozgása

A felszíni nehézségi érték változása és a potenciálváltozás kapcsolatára most a

$$\frac{\partial}{\partial H} \delta W - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial H} \delta W = - \left(\delta g^* - \frac{\partial g}{\partial H} \delta H \right) \quad (21)$$

peremfeltétel állítható fel, amely világosan mutatja, hogy a feladat megoldásához, a valódi Föld esetében, a *nehézségi mérések nem is elegendők*, hanem mellettük, *elvileg, a mérési helyek ismételt szintezéséből meghatározható magasságváltozása is szükséges* (amitől az eddigi gyakorlatban általában eltekintettek). Az elhanyagolás nagysága attól függ, hogy mekkora δg^* változásokat tapasztalunk, de ha ezek – mint várható – csekély értékek, akkor a magasságváltozás hatása nem elhanyagolható.

Az erőter δW potenciálváltozásának kiszámítására a valódi Föld esetében is a potenciálelmélet *3. peremérték feladata* vezet a (21) jobb oldalán álló *peremértékekkel*.

A megoldás egyik alakja most is a felületi integrál a

$$\delta W = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\delta g^* - \frac{\partial g}{\partial H} \delta H \right) S(\psi) d\sigma \quad (22)$$

alakban (Biró 1981b), ahol $S(\psi)$ az ismert Stokes-féle függvény.

A *másik megoldásként* itt is alkalmazható a (6) alakú *gömbfüggvény-sor*. Ennek és megfelelő deriváltjának a (21) peremfeltételbe helyettesítésével a

$$\delta g^* - \frac{\partial g}{\partial H} \delta H = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta C_{n,m} \cos m\lambda + \delta S_{n,m} \sin m\lambda) P_{n,m}(\cos \vartheta) \quad (23)$$

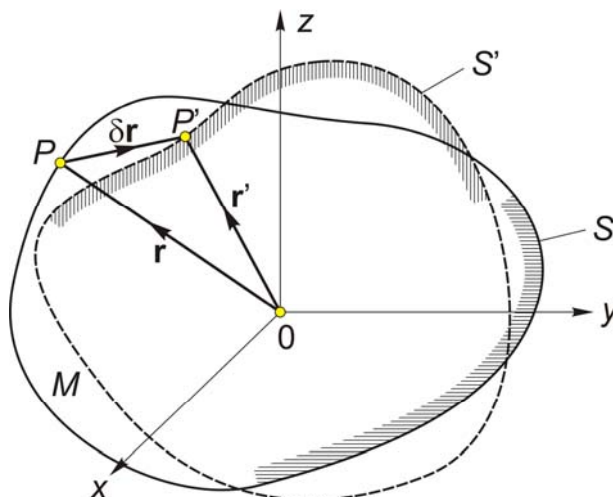
alakú *közvetítő egyenletre* juthatunk a mért peremértékek és az ismeretlen $\delta C_{n,m}$, $\delta S_{n,m}$ gömbfüggvény együttható-változások között. Kellő számú mérési pont esetén véges számú együttható időbeli változásának számértéke kiszámítható.

A megoldás módjából következik, hogy *egyes mérési pontok* tapasztalt változásaiból az erőtér változására (vagy változatlanóságára) nem lehet következtetni. A helyes következtetéshez *ismételten mért abszolút nehézségi állomások világhálózata szükséges*, amelynek pontjait minden méréskor a tengerszinthez kapcsolt szintezéssel *magassági értelemben is meg kell határozni*.

A természetes koordináták változása és a valódi felszínmozgások

Az eddigiekben a természetes koordináták közül kiragadtuk a *magasságot* és vizsgáltuk időbeli változását. Ez a módszer hallgatólagosan tartalmazza azt a feltevést, hogy a felszín és vele együtt a mérési hely *csak függőleges elmozdulást* szenved. Ez a korlátozás terheli a térerősség változásával kapcsolatos eddigi vizsgálatainkat is, vagyis ebben az értelemben eddig eltekintettünk az erőtér vízszintes irányú térbeli változásától. A természetben azonban mind a felszínmozgásnak, mind az erőtér térbeli változásának *általában vízszintes irányú összetevője is van*, ezért a feladat megoldását az eddigi egy dimenzió (magasság) helyett *három dimenzióra* kell kiterjeszteni, és a kérdést helyesen a térben kell tárgyalni. Ennek során figyelembe kell venni mindhárom koordináta irányú elmozdulás lehetőségét és az erőtér térbeli változásának vízszintes összetevőit is (Biró-Heck-Thông 1986, Biró-Thông 1986, Biró-Thông 1987).

Az 5. ábra mutatja a földfelszíni P pont $\delta \mathbf{r}$ valódi *elmozdulás-vektorának* (mozgásvektorának) a térbeli értelmezését az (X, Y, Z) geocentrikus koordináta-rendszerben (az ábrán S ill. S' a fizikai földfelszín a t ill. a $t' = t + \delta t$ időpontban).



5. ábra. A valódi felszínmozgás értelmezése

A továbbiakban is feltételezzük a Föld *tömegének állandóságát* ($\delta M \equiv 0$), valamint egyelőre a tömegközéppont és a hozzákapcsolt geocentrikus *koordináta-rendszer változatlan helyzetét*. (Ez utóbbival a későbbiekben még foglalkozni fogunk.)

Az **alapösszefüggések** tárgyalásához a 6. ábra mutatja a P földfelszíni pontot a t időpontbeli *kezdeti helyzetében*, amikor potenciálértéke $W = W_P$. A nehézségi térerősség vektora ugyanakkor \mathbf{g}_P , hatásvonalának (a helyi függőleges iránynak) térbeli helyzetét a Φ_P és Λ_P szintfelületi szélesség és hosszúság P pontbeli kezdeti értéke jellemzi.

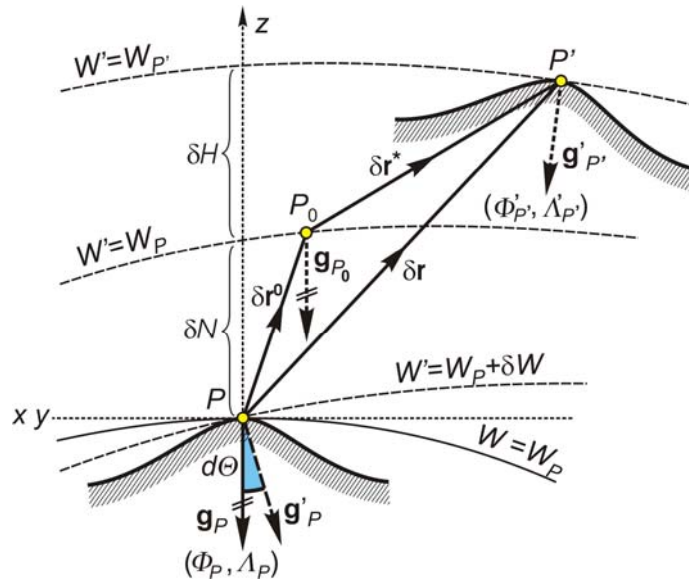
Később, a $t' = t + \delta t$ időpontban az erőtér időben bekövetkezett δW megváltozása miatt a P pont potenciálértéke $W' = W_P + \delta W$ -re, a térerősség-vektora pedig ugyanitt \mathbf{g}'_P -re változott. A térerősség-vektor irányának a megváltozása (a helyi függőleges irányváltozása) következtében a P pont szintfelületi koordinátái is megváltoznak:

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_P &= \Phi_P + \delta\Phi \\ \Lambda'_P &= \Lambda_P + \delta\Lambda \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

amiből a helyi függőleges elfordulása

$$\delta\Theta = \begin{bmatrix} \delta\Theta_\Phi \\ \delta\Theta_\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\Phi \\ \cos\Phi \delta\Lambda \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Az erőtér megváltozása következtében a P ponton kezdeti időpontban áthaladó W_P potenciálértékű szintfelület (mint korábban is láttuk) a tér azon helyére tolódik, ahol a megváltozott erőtér potenciálja $W' = W_P$ (az eltolódás δN mértéke most is az (1)-ből számítható).



6. ábra. A valódi felszínmozgás térbeli meghatározása

Az erőtérváltozás következtében azonban nemcsak a szintfelület tolódik el, hanem rajta az a ponthely is, amelynek kezdeti koordinátái Φ_P és Λ_P . Így a megváltozott erőtérben a P_0 helyen találjuk azt a pontot, amelynek természetes koordinátái *megegyeznek a P pont kezdeti koordinátáival*:

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_{P_0} &\equiv \Phi_P \\ \Lambda'_{P_0} &\equiv \Lambda_P \\ W'_{P_0} &\equiv W_P \Rightarrow H'_{P_0} \equiv H_P \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

A $\overline{PP_0} \equiv \delta \mathbf{r}^0$ vektor az erőtér változásának a geodéziai hatása, mely az erőtérváltozás függvényeként számítható a

$$\delta \mathbf{r}^0 = \begin{bmatrix} -r \delta \Theta_\phi \\ -r \delta \Theta_\lambda \\ \delta N \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \delta W \\ \frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta W \\ \delta W \end{bmatrix} \quad (27)$$

alakban, ahol r , ϑ , λ a gömbi koordináták (közelítéssel $\vartheta \approx 90^\circ - \Phi$ és $\lambda \approx \Lambda$).

Általánosság kedvéért feltételezzük, hogy az eltelt idő alatt az erőtér változása mellett $\delta \mathbf{r}$ (valódi) felszíni alakváltozás (valódi felszínmozgás) is bekövetkezett, és a földfelszíni pontunk ennek következtében a P' helyzetbe került. Itt a megváltozott erőtér térerősség-vektora $\mathbf{g}'_{P'}$, hatásvonalának (a helyi függőlegesnek) irányát pedig a $\Phi'_{P'}$ és $\Lambda'_{P'}$ szintfelületi földrajzi koordináták jellemzik.

Az elmozduló földfelszínen észlelt

$$\left. \begin{aligned} \delta \Phi^* &= \Phi'_{P'} - \Phi_P \\ \delta \Lambda^* &= \Lambda'_{P'} - \Lambda_P \\ \delta H &= H'_{P'} - H_P \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

koordináta-változásokból a 6. ábra és (26) alapján a földfelszínnek a P_0 ponthoz viszonyított

$$\delta \mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} r \delta \Phi^* \\ r \cos \Phi \delta \Lambda^* \\ \delta H \end{bmatrix} \quad (29)$$

relatív felszínmozgása határozható meg.

A $\overline{PP'} \equiv \delta \mathbf{r}$ valódi felszínmozgás a (29) relatív felszínmozgás és az erőtér változásának (27) geodéziai hatása összegeként számítható:

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}^* + \delta \mathbf{r}^0 = \begin{bmatrix} r \delta \Phi^* - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \delta W \\ r \cos \Phi \delta \Lambda^* + \frac{1}{g} \frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta W \\ \delta H + \frac{1}{g} \delta W \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Megjegyezzük, hogy a korábban megismert (20) összefüggés a (30) egydimenziós megfelelője, melyet ez utóbbi a harmadik összetevőjeként tartalmaz is, ha figyelembe vesszük az (1) összefüggést.

Mindezekből világosan látható, hogy időben változó nehézségi erőterben a természetes koordináták (28) észlelt megváltozása egymagában még *nem mutatja a földfelszíni pontok tényleges (valódi) mozgásvizonyait!* Ez utóbbi eredményre csak akkor jutunk, ha a (30) szerint figyelembe vesszük magának az erőter megváltozásának a természetes koordinátákra gyakorolt (geodéziai) hatását is. Ehhez viszont szükségünk van a nehézségi erőter időbeli változását számszerűen jellemző δW potenciálváltozás ismeretére.

Kézenfekvő, hogy ez utóbbit a földfelszíni nehézségi *térerősség megváltozásának mérése* alapján tudjuk meghatározni. Az e célra szolgáló számítási összefüggéseket szolgáltatja a **geodéziai-geodinamikai peremérték-feladat megoldása**, amit most a *térben* fogunk tárgyalni.

A 6. ábrán bemutatott esetben a nehézségi térerősség földfelszíni értéke két okból változik meg az eltelt δt időtartam alatt; az egyik az *erőter* (potenciáljának) δW megváltozása, a másik ok a P földfelszíni pont, a *mérési hely* $\delta \mathbf{r}$ áthelyeződése P' -be a földfelszín alakváltozása (a felszínmozgás) miatt. E két hatás eredőjeként a *földfelszíni nehézségi térerősség vektor időbeli megváltozása*

$$\delta \mathbf{g}^* = \mathbf{g}'_{P'} - \mathbf{g}_P = \mathbf{grad} \delta W + \mathbf{E} \delta \mathbf{r} \quad (31)$$

ahol a P ponthoz kapcsolt helyi, vízszintes síkú (x, y, z) koordináta-rendszerben a potenciál δW időbeli változására

$$\mathbf{grad} \delta W = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \delta W \\ \frac{\partial}{\partial y} \delta W \\ \frac{\partial}{\partial z} \delta W \end{bmatrix} \quad (32)$$

és

$$\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{r}} \quad (33)$$

a \mathbf{g} nehézségi térerősség-vektor derivált tenzora, az *Eötvös-féle* tenzor, amely az erőter hosszegységre eső elemi változását mutatja az elmozdulás függvényében.

Ha figyelembe vesszük, hogy a $\delta \mathbf{r}$ elmozdulás-vektor a (30)-nak megfelelően két összetevő eredőjeként írható fel, és ezt a (31)-be beírjuk, akkor átrendezés után a peremfeltétel vektori alakját kapjuk:

$$\mathbf{grad} \delta W + \mathbf{E} \delta \mathbf{r}_0(\delta W) = \delta \mathbf{g}^* - \mathbf{E} \delta \mathbf{r}^* , \quad (34)$$

amelynek jobb oldala mutatja, hogy a δW erőterváltozás meghatározásához a *térerősségnek a földfelszínen mért megváltozása mellett a felszínmozgást is figyelembe kell venni.*

Vegyük fel a helyi (x, y, z) koordináta-rendszerünket úgy, hogy $+z$ tengelye a P pontbeli helyi függőleges irányába (pozitív értelemben a külső tér felé) mutasson, xy síkja pedig a helyi vízszintes síkkal azonos legyen (a $+x$ tengely észak és a $+y$ tengely kelet felé mutasson) (6. ábra), és vezessük be a

$$g_z \approx -g , \quad \delta g_z^* \approx -\delta g \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial z} \approx \frac{\partial}{\partial r} \quad (35)$$

közelítéseket.

Ha ezek és a (30) figyelembevételével a (34) vektoregyenletnek csak a z irányú (függőleges) összetevőjére korlátozódunk, akkor a

$$\frac{\partial}{\partial r} \delta W + \left(\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} \right)_p \frac{\partial}{\partial \vartheta} \delta W - \left(\frac{1}{g \cos \Phi} \frac{\partial g}{\partial y} \right)_p \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta W - \left(\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial r} \right)_p \delta W = -G, \quad (36)$$

ahol

$$G = \delta g^* - r \frac{\partial g}{\partial x} \delta \Phi^* - r \cos \Phi \frac{\partial g}{\partial y} \delta \lambda^* - \frac{\partial g}{\partial r} \delta H \quad (37)$$

skalár peremfeltételt kapjuk a térbeli (háromdimenziós) mérési eredményekkel. A (36) és a (37) világosan mutatja, hogy a szabatos (térbeli) megoldás érdekében a *nehézségi mérések és szabatos szintezések mellett ismételt földrajzi helymeghatározás-méréseket is kell végeznünk, továbbá mérni kell a nehézségi gradiensek értékét is.*

(Megjegyezzük, hogy ha a nehézségi erőter szintfelületeinek *csak a függőleges irányú* eltolódását vizsgáljuk, és egyéb alakváltozásától eltekintünk, akkor a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \approx 0 \quad (38)$$

közelítéssel (az erőter vízszintes irányú változásának elhanyagolásával) különleges esetként a (36) és (37)-ből is visszacapjuk a korábbról ismert (21) (egydimenziós) peremfeltételt.)

Visszatérve a geodéziai-geodinamikai peremérték-feladat megoldására, most is feltételezzük, hogy az erőter időbeli változása *tömegátrendeződés* következménye, ami azt jelenti számunkra, hogy a δW potenciálváltozás *vonzási potenciálok különbsége*, és így rá vonatkozóan a forrásmentes külső térben fennáll az időbeli változásokra vonatkozó

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{g}^* = \operatorname{div} \mathbf{grad} \delta W = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta W + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta W + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta W = 0 \quad (39)$$

Laplace-egyenlet, mint meghatározó másodrendű parciális differenciálegyenlet az ismeretlen δW -re.

Ennek általános megoldása az (r, ϑ, λ) gömbi koordinátákban a (6) gömbfüggvény-sor alakjában most is alkalmazható. A benne szereplő $\delta C_{n,m}$ és $\delta S_{n,m}$ együttható-változások meghatározása érdekében a (6) gömbfüggvény-sort és a gömbi koordináták szerinti parciális deriváltjait a (36) peremfeltételbe beírva

$$G = \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n (A_{n,m} \delta C_{n,m} + B_{n,m} \delta S_{n,m}) \quad (40)$$

alakú *közvetítő egyenletet* állíthatunk fel a mérési eredmények G függvénye és az ismeretlen együttható-változások között, ahol

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{n,m} \\ B_{n,m} \end{bmatrix} &= \left(n+1 + \frac{r}{g} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \frac{kM}{r^2} \left(\frac{a}{r} \right)^n \begin{bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{bmatrix} P_{n,m}(\cos \vartheta) \\ &- r \left(\frac{a}{r} \right)^n \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} \begin{bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_{n,m}(\cos \vartheta) - \frac{m}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial y} \begin{bmatrix} -\sin m\lambda \\ \cos m\lambda \end{bmatrix} P_{n,m}(\cos \vartheta) \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Megfelelő számú geodinamikai állomáson végzett geodéziai mérések $\delta\Phi^*$, δA^* , δH , δg^* , $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$, $\partial g/\partial r$ eredményére támaszkodva a (40) alapján felírt véges számú *javítási egyenletből* n_{max} véges fokszámig terjedő ismeretlen együttható-változások számíthatók, azzal a feltétellel, hogy $n > n_{max}$ fokszámú tagok zérus értékűek.

A $\delta C_{n,m}$ és $\delta S_{n,m}$ együttható-változások számszerű ismeretében az erőtér δW változásának (6) alakú gömbfüggvény-sora és parciális deriváltja n_{max} véges fokszámig terjedően számíthatók, majd velük és a mérési eredményekkel a (30)-ból a *valódi felszínmozgás vektora* meghatározható. Ez utóbbinak első két összetevője a *valódi vízszintes*, harmadik összetevője a *valódi függőleges felszínmozgást adja*.

A (36) peremfeltételnek a

$$\frac{\partial}{\partial r} \delta W - \left(\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial r} \right)_P \delta W = -G \quad (42)$$

közelítő alakját kaphatjuk, ha a bal oldalán élünk a (37) elhanyagolással. Ez esetben a peremérték-feladat megoldható a (37) peremértékek *felületi integrálásával*. Ennek az az előnye, hogy az integrálás tagonként végezhető, és így külön tudjuk választani az ismételt nehézségi mérések δW_{gr} és az ismételt földrajzi helymeghatározások eredményeinek δW_{fh} hatását az erőtér időbeli változására. (A jobb oldalon élünk még az $r \approx R$ közelítéssel.)

Így

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G S(\psi) d\sigma = \\ &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\delta g^* - \frac{\partial g}{\partial r} \delta H \right) S(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \delta \Phi^* - \cos \Phi \frac{\partial g}{\partial y} \delta A^* \right) S(\psi) d\sigma = \quad (43) \\ &= \delta W_{gr} + \delta W_{fh} \end{aligned}$$

ahol R a közepes fűldsugár, σ , ill. $d\sigma$ az egységgömb felülete, ill. felületeleme és $S(\psi)$ a Stokes-féle függvény. Ezzel a megoldással *egyres pontonként* kaphatjuk meg az erőtér megváltozását (az egész Fűd्रे kiterjedő geodinamikai hálózat ismételt méréseinek eredményei alapján).