

**Fizikai geodézia és gravimetria / 13.**
**GEOID MEGHATÁROZÁSA A POTENCIÁL  
GÖMBFÜGGVÉNY SORÁVAL, A STOKES-FÉLE  
SORRAL, AZ ABSZOLÚT FÜGGŐVONAL-ELHAJLÁS  
SZÁMÍTÁSA.**

A potenciálzavart a valódi és a normál nehézségi erőter potenciáljának  $T = W - U$  különbségeként értelmeztük. Mint említettük a különbségképzésből a centrifugális erőter potenciálja kiesik, így a potenciálzavar a valódi és a normál nehézségi erőter tömegvonzási potenciáljának különbségével egyenlő.

A Föld tömegének vonzási potenciálja a külső térben (a Laplace-egyenlet általános megoldásaként) gömbfüggvénysorral fejezhető ki.

A normál nehézségi erőter forgási és egyenlítői szimmetriás potenciálfüggvényének tömegvonzási része a

$$\frac{kM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n}^* P_{2n}(\cos \vartheta) \right] \quad (1)$$

gömbfüggvénysor alakjában írható, ahol  $a$  az ellipszoid egyenlítői fél nagytengely hossza,  $J_{2n}^*$  pedig a normál nehézségi erőter forrását képező tömeg eloszlását jellemző együtthatók.

A  $T$  függvény gömbfüggvénysorának általános alakját megkapjuk, ha az előbbi két gömbfüggvénysor különbségét képezzük. (Itt élünk az  $r_p \approx a \approx R$  közelítéssel. Az így nyert gömbfüggvénysor lesz tehát a  $T$  függvény általános alakja. Az ebben szereplő  $\delta J_n$ ,  $C_{nm}$  és  $S_{nm}$  együtthatók számértékének meghatározásával kell kikeresnünk azt a konkrét számszerű függvényalakot, amely a geoidra felállított peremfeltételnek eleget tesz.

Írjuk be a  $T$  függvénynek az előbbi különbségképzéssel nyert általános gömbfüggvénysor alakját a

$$\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda) = \Delta g_p \quad (2)$$

peremfeltétel bal oldalára, így a

$$\Delta g_p = -\frac{kM}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left[ \delta J_n P_n(\cos \vartheta) - \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right] \quad (3)$$

alakra jutunk. Annyi ilyen alakú egyenletet írhatunk fel, ahány pontban mért nehézségi érték alapján ismert  $\Delta g_p$  geoidi nehézségi rendellenességünk van. Ezek számértékét a bal oldalra beírva, a jobb oldalon álló ismeretlen  $\delta J_n$ ,  $C_{nm}$  és  $S_{nm}$  együtthatókból az egyenletek számának megfelelő mennyiségűt ki tudunk számítani. (A gyakorlatban az igen nagyszámú felírható egyenletből ennél lényegesen kevesebb számú

ismeretlen számértékét határozzuk meg a legkisebb négyzetek módszere szerinti számítással.)

Az így kiszámított együtthatókkal már számszerűen felírhatjuk a  $T$  potenciálzavar gömbfüggvénysorának a kiszámított együtthatók számának megfelelő véges számú tagját. (A ki nem számított együtthatók értékét ezúttal zérusnak tekintjük.)

Az így előállított gömbfüggvénysort a *Bruns*-féle összefüggés számlálójába beírva kapjuk végeredményként az  $N$  geoid-ellipszoid távolságok  $N(\vartheta, \lambda) = T_{P'}(\vartheta, \lambda) / \gamma_{P'}$  gömbfüggvénysorát.

Ennek a meghatározásnak az az előnye, hogy  $\vartheta = 90^\circ - \varphi$  és  $\lambda$  helyére tetszőleges koordináta-párokat beírva, a Föld tetszőleges helyére számítható a geoid-ellipszoid távolság értéke. Így például megfelelő programmal számíthatók a hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjának tetszőleges sűrűségű hálózatához az  $N$  értékek, amelyek között azután izovonalakat szerkesztve, megrajzolhatjuk az egész Föld geoidjának izovonalas képét a felvett alapfelülethez (szintellipszoidhoz) viszonyítva. Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a kapott geoid-ellipszoid távolságok geocentrikus elhelyezésű alapfelülethez viszonyítva értendők. Ezt azáltal érzük el, hogy a normálpotenciál (1) gömbfüggvénysora nem tartalmaz  $2n = 1$  fokú tagot, ami abban az esetben áll elő, ha a koordináta-rendszer kezdőpontját a vonzó tömeg tömegközéppontjába helyezzük.

## Megoldás a Stokes-féle sorral

Most az előbbi feladatnak másik megoldását mutatjuk be. Keressük tehát újra a  $T$  potenciálzavar függvényét úgy, hogy a geoidra felállított peremfeltétel valamelyik alakját a geoidon kielégítse. A

$$\left( \frac{\partial T}{\partial H} \right)_{P'} + \frac{2}{R} T_{P'} = -\Delta g_{P'} = -(g_{P'} - \gamma_{P'}) \quad (4)$$

peremfeltételben a  $T$  potenciálzavar függvényét gömbfüggvénysorával helyettesítve származtattuk a (2) alakot, ahol a bal oldalt írtuk át gömbfüggvénysor alakjába. Helyettesítsük a jobb oldalon álló  $\Delta g$  nehézségi rendellenességet is gömbfüggvénysorával:

$$\Delta g_{P'} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(\vartheta, \lambda). \quad (5)$$

Ha két gömbfüggvénysor tagjai egyenként egymással egyenlők, akkor az egyenlőség a sorok összegére is fenn áll:

$$\Delta g_n(\vartheta, \lambda) = \frac{n-1}{R} T_n(\vartheta, \lambda). \quad (6)$$

Az  $n$ -ed fokú tagok egymással egyenlővé tételéből egyenletet kapunk, amelyet  $T_n(\vartheta, \lambda)$ -ra megoldva megkapjuk a potenciálzavar gömbfüggvénysorának  $n$ -ed fokú tagját:

$$T_n(\vartheta, \lambda) = \frac{R}{n-1} \Delta g_n(\vartheta, \lambda). \quad (7)$$

Ezeket  $n = 0$ -tól végtelenig összegezve kapjuk a keresett  $T$  potenciálzavart a  $\Delta g$  nehézségi rendellenességek gömbfüggvénysorának függvényében a

$$T_{P'} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta g_n(\vartheta, \lambda)}{n-1} \quad (8)$$

*Stokes-féle sor* alakjában.

Megjegyezzük, hogy ez a megoldás  $n = 1$  esetén határozatlanná válik, vagyis a (6) alakból a  $T$  potenciálzavar gömbfüggvénysorának 1. fokú tagját nem lehet kiszámítani.

Ez azonban számunkra nem jelent hátrányt, ugyanis tudjuk, hogy a potenciálzavar gömbfüggvénysora a valódi és a normálpotenciál függvény gömbfüggvénysorának különbségeként áll elő. Emlékeztetünk arra, hogy a gömbfüggvénysor előállításakor a koordináta-rendszer kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába helyeztük, miáltal a sor 1. fokú tagjai zérus értékűvé váltak. Ugyanez a helyzet a normálpotenciál (1) sorával is, amely szintén nem tartalmaz 1. fokú tagot. Következésképpen a potenciálzavarnak a két sor különbségeként értelmezett gömbfüggvénysorában eleve nem is lehet elsőfokú tag, ilyet tehát számítani nem kell. Viszont ennek következtében itt is tudomásul kell venni azt a megkötést, hogy koordináta-rendszerünk kezdőpontja a Föld tömegközéppontjával azonos.

Továbbmenve még azt is megállapíthatjuk, hogy a különbség képzésből a sorok  $n = 0$  fokú  $kM/r$  alakú vezető tagja is kiesik, tehát a (8)-ban az összegezést elegendő  $n = 2$ -től kezdeni:

$$T_{P'} = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n(\vartheta, \lambda)}{n-1}. \quad (9)$$

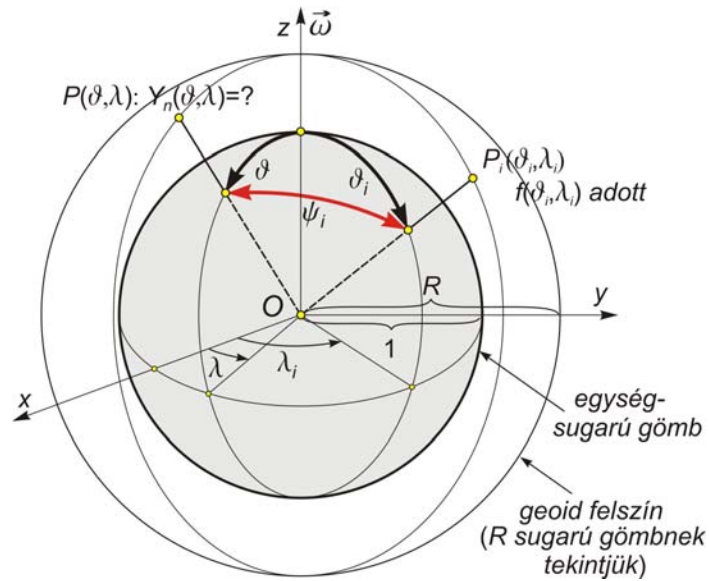
A (9) *Stokes-féle sor* hasznosításához tehát a pontonkénti (diszkrét)  $\Delta g_i$  nehézségi rendellenességekből elő kell állítani a nehézségi rendellenességek gömbfüggvénysorát. Erre a matematikából jól használható eljárás áll rendelkezésünkre, ugyanis tetszőleges  $f(\vartheta_i, \lambda_i)$  függvényértékek (adatok) alapján felírható az erre vonatkozó  $Y(\vartheta, \lambda)$  gömbfelületi függvény  $n$ -ed fokú tagja:

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\underbrace{\lambda_i=0}_{\sigma}}^{2\pi} \int_{\vartheta_i=0}^{\pi} f(\vartheta_i, \lambda_i) P_n(\cos \psi_i) \underbrace{\sin \vartheta_i d\vartheta_i d\lambda_i}_{d\sigma}. \quad (10)$$

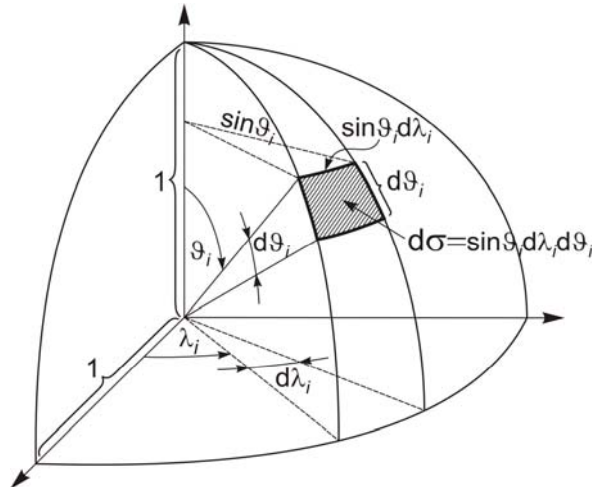
A (10) összefüggésben szereplő változók értelmezése az 1. ábrán látható,  $\sigma$  az egységgömb felületét,  $d\sigma$  ennek elemi darabját (azaz a térszögelemet),  $\psi_i$  pedig az  $i$ -ik diszkrét (mért) nehézségi rendellenességnek a vizsgált helytől mért gömbi szögtávolságát (vagy egységgömb felületi ívtávolságát) jelenti. Ahhoz, hogy egyetlen  $P(\vartheta, \lambda)$  pontban az  $Y(\vartheta, \lambda)$  gömbfelületi függvény  $Y_n(\vartheta, \lambda)$   $n$ -ed fokú tagját meghatározzuk, az egység sugarú gömb teljes  $\sigma$  felületére el kell végezni az  $f(\vartheta_i, \lambda_i)$  integrálását. Az integráláshoz a  $d\sigma$  felületelem értelmezése a 2. ábrán látható.

Amennyiben az  $f(\vartheta_i, \lambda_i) = \Delta g_i$ , a (10) alapján a nehézségi rendellenességek gömbfüggvénysorának  $n$ -ed fokú tagja:

$$\Delta g_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_i P_n(\cos \Psi_i) d\sigma. \quad (11)$$



1. ábra. Az  $Y(\vartheta, \lambda)$  gömbfelületi függvény tagjainak előállítására ismert  $f(\vartheta_i, \lambda_i)$  függvényértékek (adatok) alapján



2. ábra. A  $d\sigma$  felületelem az egység-sugarú gömb felületén

A (11)-et a (8) Stokes-féle sor jobb oldalára bevezetve, rendezés után a potenciálzavarra a

$$T_{p'} = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_i S(\Psi_i) d\sigma \quad (12)$$

alakra jutunk, ahol az ún. Stokes-függvény az

$$S(\Psi_i) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \Psi_i) \quad (13)$$

sor összegét jelöli. Ennek a végtelen sornak az összegét *Stokes* zárt alakban kiszámította:

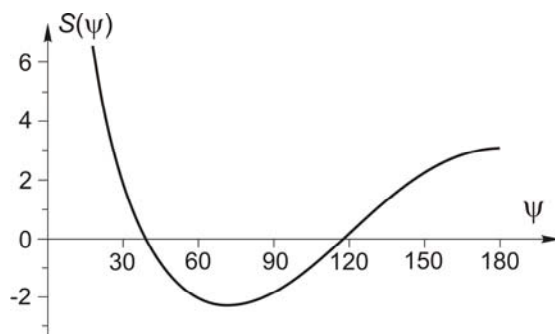
$$S(\Psi) = \frac{1}{\sin \frac{\Psi}{2}} - 6 \sin \frac{\Psi}{2} + 1 - 5 \cos \Psi - 3 \cos \Psi \ln \left( \sin \frac{\Psi}{2} + \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right). \quad (14)$$

A potenciálzavarra kapott (12) megoldást a már ismert *Bruns*-féle összefüggés számlálójába beírva, kapjuk végeredményként a geoid-ellipszoid távolság (az  $U_0 = W_0$  azonos potenciálértékű szintfelületek távolságának) gravimetriai meghatározására az

$$N = \frac{T_{P''}}{\gamma_{P''}} = \frac{R}{4\pi\tilde{\gamma}} \iint_{\sigma} S(\Psi_i) \Delta g_i d\sigma \quad (15)$$

*Stokes-féle integrálképletet* (a nevezőben a  $\gamma_{P''}$  értéket elegendő az átlagos  $\tilde{\gamma}$  értékkel közelíteni). Ez a fizikai geodézia egyik legfontosabb összefüggése, mely kapcsolatot teremt a geoid-ellipszoid távolság és a mérésekből meghatározható geoidi nehézségi rendellenességek között.

Mivel az előirt integrálást az egységgömb egész felszínére ki kell terjeszteni, a *Stokes-féle integrálképlet* gyakorlati hasznosításához az egész földfelszínre kiterjedő nehézségi mérések szükségesek. Ez összhangban van azzal, hogy a *Stokes-féle integrálképletben* szereplő  $S(\Psi_i)$  *Stokes-függvény* felfogható az egyes  $\Delta g_i$  nehézségi rendellenességek „súlyfüggvényeként” (ennek alakja a 3. ábrán látható) és az ábra tanúsága szerint az  $S(\Psi_i)$  értéke (a  $\Delta g_i$  hatása) igen nagy távolságban is számottevő.



3. ábra. A Stokes-féle függvény

Gyakorlati számítások céljára hasznos a (15) *Stokes-integrál* összefüggését  $\varphi \approx \varphi_{\text{gömbi}} = 90^\circ - \vartheta$ ,  $\lambda$  ellipszoidi földrajzi koordinátákkal is felírni:

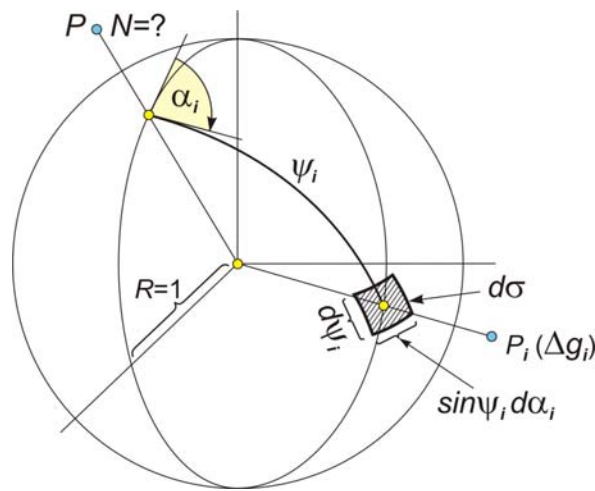
$$N = \frac{R}{4\pi\tilde{\gamma}} \int_{\lambda_i=0}^{2\pi} \int_{\varphi_i=-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} S(\psi_i) \Delta g_i \cos \varphi_i d\varphi_i d\lambda_i, \quad (16)$$

ahol  $\psi_i = \arccos(\sin \varphi \sin \varphi_i + \cos \varphi \cos \varphi_i \cos(\lambda_i - \lambda))$ , vagy a 4. ábra jelöléseinek megfelelő egységgömb felületi  $\psi$ ,  $\alpha$  polárkoordinátákkal megadni:

$$N = \frac{R}{4\pi\tilde{\gamma}} \int_{\alpha_i=0}^{2\pi} \int_{\psi_i=0}^{\pi} S(\psi_i) \Delta g_i \sin \psi_i d\psi_i d\alpha_i. \quad (17)$$

A megoldás a *Stokes*-integrállal akkor használható előnyösen, ha csak egyes  $P$  pontokban keressük a geoid-ellipszoid távolságot (de természetesen nincs akadálya, hogy több ilyen pont eredménye alapján valamely terület geoid ábrázolását is elkészítsük ilyen módon).

Minden esetre tudni kell azt, hogy az 5. feltétel következményeként a kapott geoid-ellipszoid távolságok *geocentrikus elhelyezésű* ellipszoidra vonatkoznak, amelynek méret és alak jellemzőit közvetve a  $\Delta g$  nehézségi rendellenesség kiszámítására használt  $\gamma$  normál nehézségi gyorsulás képlet együtthatóin keresztül vettük fel.



4. ábra. A Stokes-integrál egységgömb felületi polárkoordinátákkal

Az elérhető megbízhatóság nagymértékben attól függ, hogy a vizsgált pont közvetlen környezetében milyen sűrűségben vannak mért  $\Delta g$  nehézségi rendellenességeink.

## A Vening Meinesz-féle összefüggés

A *Stokes*-féle integrálképletből további fontos összefüggés származtatható a geoid és a geocentrikus elhelyezésű ellipszoid egymáshoz viszonyított geometriai helyzetének tanulmányozásához.

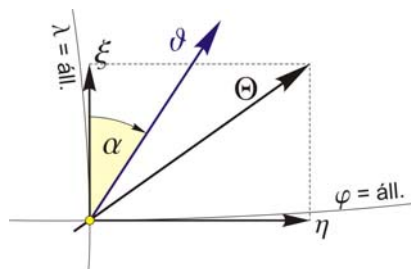
A csillagászati szintezés szoros kapcsolat van a geoid és az ellipszoid egymáshoz viszonyított helyzetét jellemző két geometriai mennyiség, a függővonal-elhajlás és a geoid-ellipszoid távolságok megváltozása között. Az ottani gondolatmenet megismétlésével könnyen meggyőződhetünk arról, hogy függővonal-elhajlás  $\Theta$  szöge:

$$\Theta = -\frac{dN}{ds}, \quad (18)$$

vagyis a  $\Theta$  a geoid-ellipszoid távolság vízszintes ívhossz szerinti differenciáhányadosával fejezhető ki.

Mivel a 5. ábra jelölései szerint  $\Theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , ezért a (18) összefüggés értelemszerűen felírható a függővonal-elhajlás  $\xi$  meridián, és az  $\eta$  I. vertikális irányú összetevőjére is (természetesen a  $ds$  ívhossz helyett ennek  $ds_m$  meridián és  $ds_p$  paralelkör irányú vetületét kell figyelembe venni):

$$\Theta \Rightarrow \begin{cases} \xi = -\frac{dN}{ds_m} \\ \eta = -\frac{dN}{ds_p} \end{cases} \quad (19)$$



5. ábra. A függővonal-elhajlás összetevők értelmezése

Az  $N$  helyére beírva most a (15) Stokes-integrálképletet:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{R}{4\pi\tilde{\gamma}} \iint_{\sigma} \frac{dS(\psi_i)}{ds_m} \Delta g_i d\sigma \\ \eta &= -\frac{R}{4\pi\tilde{\gamma}} \iint_{\sigma} \frac{dS(\psi_i)}{ds_p} \Delta g_i d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Mivel a (15) Stokes-féle képletben a (14) által kifejtett  $S(\psi)$  Stokes-függvényen kívül minden más tényező a felületi ívhossztól független számérték, így a differenciálás során egyedül ennek kell a meridián és a rá merőleges paralelkör irányú differenciálhányadosát képezni.  $S(\psi)$  -nek a (13) és (14) szerinti értelmezéséből kitűnik azonban, hogy ezek a differenciálások csak közvetve (az ún. lánc-szabály szerint) végezhetők el:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(\psi)}{ds_m} &= \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds_m} \\ \frac{dS(\psi)}{ds_p} &= \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds_p} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

A (21)-ben szereplő  $dS(\psi)/d\psi$  az  $S(\psi)$  Stokes-függvény  $\psi$  szerinti differenciálásával egyszerűen számítható ki, ugyanakkor a  $d\psi/ds_m$  és a  $d\psi/ds_p$  differenciálhányadosok egységsugarú gömbön a 6. ábrán látható geometriai megfontolás alapján határozhatók meg:

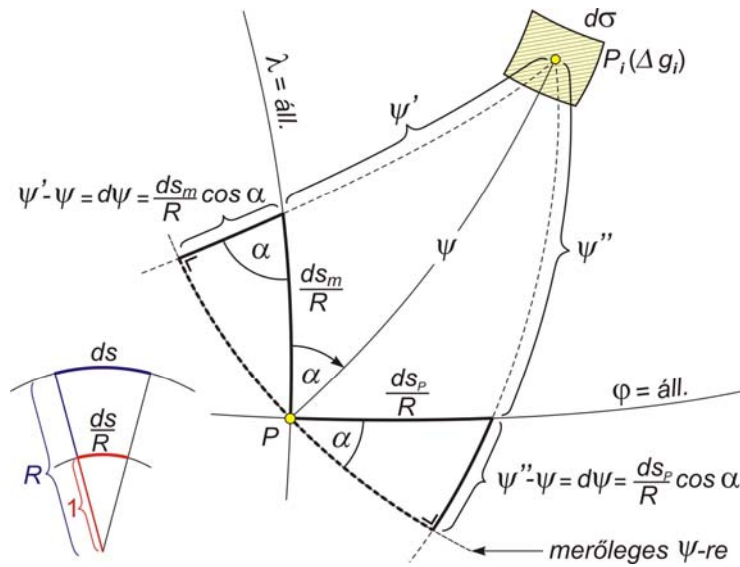
$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(\psi)}{ds_m} &= \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds_m} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \alpha \\ \frac{dS(\psi)}{ds_p} &= \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds_p} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Végül mindezek figyelembe vételével a függővonal-elhajlások számítására vonatkozó

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\tilde{\gamma}} \iint_{\sigma} \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{bmatrix} \Delta g_i d\sigma \quad (23)$$

alakú *Vening Meinesz*-féle összefüggésre jutunk, ahol a *Stokes*-függvény  $\psi$  szerinti  $dS(\psi)/d\psi$  differenciálhányadosát többtagú, zárt kifejezés alakjában ki lehet számítani:

$$\frac{dS(\psi)}{d\psi} = -\frac{\cos \frac{\psi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\psi}{2}} + 8 \sin \psi - 6 \cos \frac{\psi}{2} - 3 \frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{\sin \psi} + 3 \sin \psi \cdot \ln \left[ \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right]. \quad (24)$$



6. ábra. Geometriai megfontolás a  $d\psi/ds_m$  és a  $d\psi/ds_p$  differenciálhányadosok meghatározása céljából

Ezt a (24) kifejezést *Vening Meinesz függvénynek* nevezzük. A (23)-ban  $\alpha_i$  a vizsgált pontból az  $i$ -ik mérési hely ( $\Delta g_i$  nehézségi rendellenesség helye) felé menő  $\psi_i$  gömbi ívhossz azimútját jelöli a vizsgált pontban. ( $\sigma$  és  $d\sigma$  továbbra is az egységgömb felületét, ill. felületelemét, vagy a térszögelemet jelenti.)

Ily módon a *Stokes*-féle integrálképletből összefüggést származtattunk, amelyből meghatározhatók a vizsgált geoidi pontbeli függővonal-elhajlás összetevők a mérések alapján ismert nehézségi rendellenességek függvényében. Az előirt egységgömb felületi integrálást akkor lehet elvégezni, ha a  $\Delta g_i$  nehézségi rendellenességek elvileg az egész Föld felszínén kellő számban állnak rendelkezésünkre. Ebből az elvi követelményből a gyakorlatban lényeges engedményt



tehetünk. Az elérhető megbízhatóság ez esetben is jelentősen függ a vizsgált hely közvetlen környezetében található  $\Delta g_i$  értékek számától és eloszlásától.

Mivel a (23) Vening Meinesz-féle összefüggést a Stokes-féle integrálképletből származtattuk, ezért ez utóbbinak érvényességi feltételei vonatkoznak erre is. Ebből következik, hogy a Vening Meinesz képletből kiszámított függővonal-elhajlás összetevők a geoidi normálisnak *geocentrikus elhelyezésű* ellipszoid normálisához viszonyított helyzetét mutatják. Ezért őket *abszolút* függővonal-elhajlás összetevőknek nevezzük. Erre utal a (23)-ban az  $a$  alsó index. (Az ellipszoidi méret- és alakjellemzőket itt is a  $\Delta g_i$  nehézségi rendellenességek kiszámítására bevezetett normál nehézségi képlet felvételével közvetve választottuk meg.)

A most megismert módon a Stokes és a Vening Meinesz összefüggéssel gravimetriai úton meghatározott geoid-ellipszoid távolságok és abszolút függővonal-elhajlások elvileg alkalmasak a helyi (nemzeti) geodéziai alaphálózatok geocentrikus (abszolút) elhelyezésének, vagy geocentrikus rendszerbe átszámításának megoldására. Sajnos az így számított geoid-ellipszoid távolságok és függővonal-elhajlások gyakorlatilag elérhető megbízhatósága azonban (nehézségi adatok hiánya és messze nem egyenletes eloszlása miatt) jelenleg még néhányszor 10 m, ill. néhány szögmásodperc nagyságrendű (és a helytől függően igen különböző) lehet.