Fizikai geodézia és gravimetria / 12.

VONATKOZTATÁSI RENDSZER PARAMÉTEREINEK MEGHATÁROZÁSA *g* MÉRÉSEK ALAPJÁN.

Geodéziai vonatkoztatási rendszernek (*Geodetic Reference System = GRS*) a *geodéziai földmodellt matematikailag meghatározó mennyiségek* (paraméterek) (mint, pl. a vonatkoztatási felület a mérete, f lapultsága, a Föld tömegét jellemző kM geocentrikus gravitációs állandó, a Föld ω forgási szögsebessége, stb.) *számszerű értéksorát* nevezzük. Meghatározása geometriai és fizikai jellegű mérési eredmények együttes feldolgozásával lehetséges

Korlátozódjunk a nehézségi erőtér pontenciál gömbfüggvény-sornak csak az első néhány tagjára. A legegyszerűbb eset a $k=0$ értékhez tartozó központos (centrális) erőtér lenne, de ez még túl durva közelítés a földi szintfelületek alakjára, ezért a gyakorlatban elfogadott legegyszerűbb esetben $k=2$-ig összegezzük a sor tagjait. Így jutunk a *Clairaut* által levezetett, és róla elnevezett ***Clairaut*-féle szintszferoidokra**. Ezek

$$U_2 = \frac{kM}{r}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\, P_2\left(\sin\psi\right)\right]+\frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\psi = \text{állandó} \tag{1}$$

egyenletében az U normálpotenciál függvénynek a 0. és a 2. fokú gömbfüggvény tagja szerepel.

Jó közelítéssel, ennek r szerinti parciális differenciálhányadosa abszolút értékeként kapjuk meg az U_2 potenciálfüggvényhez tartozó normál nehézségi erőtér *térerősségét* a

$$\gamma \approx \left|\frac{\partial U_2}{\partial r}\right| = \frac{kM}{r^2}\left[1-3\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\, P_2\sin\psi\right]-\omega^2 r\cos^2\psi\ . \tag{2}$$

gömbfüggvénysor alakban. Írjuk fel az (1) és a (2) összefüggéseket az egyenlítőn ($\psi=0°$, $r=a$, $\gamma=\gamma_e$) és a pólusokon ($\psi=90°$, $r=b$, $\gamma=\gamma_p$):

$$\left.\begin{aligned}
U &= \frac{kM}{a}\left(1+\frac{1}{2}J_2\right)+\frac{1}{2}\omega^2 a^2\\
U &= \frac{kM}{b}\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2 J_2\right]\\
\gamma_e &= \frac{kM}{a^2}\left(1+\frac{3}{2}J_2\right)-\omega^2 a^2\\
\gamma_p &= \frac{kM}{b^2}\left[1-3\left(\frac{a}{b}\right)^2 J_2\right]
\end{aligned}\right\}$$

amelyben a $b=a(1-f)$ helyettesítéssel a normál nehézségi erőteret meghatározó összesen 8 mennyiség

$$(U, \gamma_e, \gamma_p, kM, J_2, a, f \text{ és } \omega)$$

szerepel. Itt *f* a szintszferoid $f = (a-b)/a$ *geometriai lapultsága.*

Fejezzük ki az első három egyenletből *kM*-et, *U*-t és J_2-t, és írjuk be ezek kifejezését a negyedikbe, amit végül oldjunk meg *f*-re. Így az

$$f = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \tag{3}$$

nevezetes alakra, a *szintszferoidok* ***Clairaut-féle összefüggésére*** jutunk. Ennek jelentősége abban van, hogy lehetőséget nyújt valamely szintszferoid *f geometriai lapultságának meghatározására* az ω forgási szögsebesség és a szferoid *a* egyenlítői félátmérőjének ismeretében, a normál nehézségi térerősség γ_p sarki és γ_e egyenlítői értéke, vagyis *fizikai jellegű mennyiségek alapján*.

A (3) jobb oldali első tagjában az egyenlítői centrifugális és nehézségi térerősség arányát szokás *m*-mel és a második tagot pedig β-val jelölni. Ez utóbbi

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \tag{4}$$

arányszámot *nehézségi lapultságnak* nevezzük.

Itt jegyezzük meg, hogy használjuk még a potenciál gömbfüggvény-sora 2.-fokú, nullarendű

$$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2} \tag{5}$$

együtthatójára a *sztatikai lapultság,* és tehetetlenségi nyomatékok

$$\frac{C-A}{C} \tag{6}$$

arányszámára a *dinamikai lapultság* elnevezéseket is.

Felhasználásukkal a szintszferoidok néhány összefüggése (az f geometriai lapultság 10^{-3} nagyságrendjéig és a $\psi \approx \varphi$ közelítéssel) a *normál nehézségi térerősség* a szintszferoid felszínén a φ földrajzi szélesség függvényében:

$$\gamma = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 \varphi + \ldots)\,, \tag{7}$$

ahol a nehézségi lapultság

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = -\frac{3}{2}J_2 + 2m + \ldots \quad ; \tag{8}$$

a szferoidi *helyvektor hossza*

$$r = a(1 - f \sin^2 \varphi + \ldots)\,, \tag{9}$$

ahol

$$f = \frac{a-b}{a} = \frac{3}{2}J_2 + \frac{m}{2} + \ldots \tag{10}$$

a szintszferoid geometriai lapultsága.

Végül a szintszferoidokra felírható az

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{5}{2}m + \beta \\ kM &= \gamma_e a^2 (1 - f + \frac{3}{2}m + ...) \\ U &= \frac{kM}{a}\left(1 + \frac{f}{3} + \frac{m}{3} + ...\right) \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

három alapösszefüggés a benne szereplő hét meghatározó mennyiség

$$(kM, U, \gamma_e, \gamma_p;\; a, f \text{ és } \omega)$$

között. Így 4 kiinduló mennyiség ismeretében a földmodell fennmaradó további 3 jellemzője a (11) három összefüggése felhasználásával kiszámítható.

A 4 kiinduló mennyiség közül az $\omega = 7{,}292116 \times 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1}$ és az $a = 6378245 \times 10^6\,\mathrm{m}$ felvétele kézenfekvő, hiszen pl. a Föld forgási szögsebességét csillagászati mérésekből nagyon pontosan ismerjük. Ugyanakkor vegyük észre, hogy a (3) Clairaut-féle összefüggésben ugyanazok a γ_e és β ismeretlenek szerepelnek, mint a normál nehézségi gyorsulás (7) képletében! Így az f lapultság meghatározására vonatkozó feladatunkat visszavezethetjük a g normálképlet együtthatóinak meghatározására.

Ennek megfelelően, ha elegendő számú φ földrajzi szélességű pontban ismerjük a g nehézségi gyorsulás mérésekkel meghatározott és a szferoid felszínére redukált értékét, akkor a (7) összefüggést közvetítő egyenletként alkalmazva a γ_e és a β a legkisebb négyzetek alapelvének felhasználásával meghatározhatók.

Ennél a számításnál fontos alapkövetelmény hogy a kiegyenlítésbe bevont g értékek ne tartalmazzanak szabályos hibát, ezért ha a földfelszínen különböző tengerszint feletti h magasságokban mértük a g értékeket, akkor ezeket át kell számítanunk (redukálni kell) a szintszferoid felületére. A szintszferoid feletti magasságokat viszont nem ismerjük, ezért helyette csak az ezt jól közelítő tengerszintre tudjuk átszámítani a méréseinket.

A g értékek átszámítása előtt viszont tisztáznunk kell, hogy mit is értünk h magasságban a terepszinten meghatározott g érték tengerszinti megfelelőjén. Ezzel kapcsolatosan két felfogás létezik:

1.) A g tengerszinti megfelelőjén azt az értéket értjük, amelyet a fizikai földfelszín alatt, a tömegek belsejében “a tengerszintig nyúló kút alján” mérnénk – miközben minden tömeg az eredeti helyzetében maradna.

2.) A g tengerszinti megfelelőjén azt a g értéket képzeljük, amelyet úgy mérnénk, hogy a tengerszint feletti tömegeket eltávolítanánk (dózerokkal eltüntetnénk).

Az első elgondolásnak megfelelő átszámítás során három lépésben jutunk eredményre: először Bouguer-redukcióval eltávolítjuk a tömegeket a földfelszín és a tengerszint között, ezt követően Faye-redukcióval levisszük a pontot a tengerszintre, majd egy harmadik lépésben ismét Bouguer redukciót alkalmazva visszaállítjuk a tömegeket az eredeti helyzetükbe:

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_F - \delta g_B = g_P - 2\delta g_B + \delta g_F\,. \tag{12}$$

A második elgondolás szerinti átszámítás során csak az előző két lépést kell elvégeznünk, tehát egy Bouguer és egy Faye-redukciót kell számítanunk:

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_F \,. \tag{13}$$

Az 1. elképzelés hibája, hogy a meghatározandó felületen kívül nem lehetnek tömegek (a geoid felülete metszhet bele a tömegekbe), – ez a Laplace-egyenlet megoldásánál alapfeltevés volt, de a második felfogás szerinti redukció sem jó, mert ez viszont eltünteti a geoid feletti tömegeket, így meghamisítja a Föld össztömegét.

A Bouguer redukció:

$$\delta g_B = 2k\pi\rho h = -0.0419\,\rho\, h[\mathrm{m}]\cdot 10^{-3}\,[10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}]\,, \tag{14}$$

A Faye-redukció:

$$\delta g_F = -0.3086\; h[\mathrm{m}]\cdot 10^{-3}\,[10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}]\,, \tag{15}$$

A (13) szerinti redukció $\rho = 2670\,\mathrm{kg/m^3}$ átlagos földkéreg sűrűség esetén a (14) és a (15) összevonásával:

$$g_{P'} = g_P + 0.1967\cdot h\,. \tag{16}$$

Ezekkel a redukált g értékekkel már végrehajtható a kiegyenlítés (bár még ezek is tartalmaznak kis szabályos hibát, mivel nem a szferoidra, hanem a tengerszintre redukáltunk).

A közvetítő egyenletek:

$$\gamma_i = g_{p_i'} + v_i = \gamma_e\left(1 + \beta\sin^2\varphi_i\right). \tag{17}$$

Előzetes értékeket veszünk fel:

$$\gamma_e = \gamma_0 + \delta\gamma_e \qquad \gamma_0 = 9.78030$$

$$\beta = \beta_0 + \delta\beta \qquad \beta_0 = 0.005300$$

A közvetítő egyenleteket a linearizálás céljából sorbafejtjük:

$$\gamma_i = (\gamma_i)_0 + \frac{\partial\gamma_i}{\partial\gamma_e}\delta\gamma_e + \frac{\partial\gamma_i}{\partial\beta_e}\delta\beta\,, \tag{18}$$

ebből:

$$g_i + v_i = \underbrace{\gamma_0\left(1 + \beta_0\sin^2\varphi_i\right)}_{(\gamma_i)_0} + \underbrace{\left(1 + \beta_0\sin^2\varphi_i\right)}_{a_i}\delta\gamma_e + \underbrace{\left(\gamma_0\sin^2\varphi_i\right)}_{b_i}\delta\beta\,. \tag{19}$$

A javítási egyenletek:

$$v_i = a_i\delta\gamma_e + b_i\delta\beta + l_i\,. \tag{20}$$

A megoldás:

$$\begin{bmatrix}\delta\gamma_e\\ \delta\beta\end{bmatrix} = \mathbf{x} = -\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{l} \quad \rightarrow \gamma_0,\ \beta \rightarrow f\,. \tag{21}$$

Mintaszámítás:

FI(i) [fok-pe-mp]	h(i) [m]	g(i) [m/s^2]
66-29-54.0	88.0	9.823600
59-46-18.0	75.0	9.818990
54-59-06.0	79.0	9.814780
49-00-42.0	114.0	9.809560
45-28-42.0	116.0	9.805640
43-46-48.0	48.0	9.805010
35-52-48.0	0.0	9.798870
29-51-30.0	115.0	9.792950
27-28-00.0	15.0	9.791710
21-01-24.0	11.0	9.786860
15-36-30.0	381.0	9.783060
06-56-00.0	7.0	9.781340

```
a       = 6378245.000  [m]
OMEGA   = .7292116E-04 [1/s]
GAMMAe0 = 9.78030      [m/s^2]
BETA0   = .005300
```

red. g(i)	A(i)	B(i)	L(i)
9.8237731	1.00445718	8.22501607	.0001196283
9.8191375	1.00395667	7.30139320	-.0001400018
9.8149354	1.00355505	6.56027334	.0001341951
9.8097842	1.00301988	5.57269921	.0000512073
9.8058682	1.00269424	4.97179679	.0007824906
9.8051044	1.00253718	4.68196069	.0000101153
9.7988700	1.00182056	3.35954247	-.0007642851
9.7931762	1.00131367	2.42416242	-.0000280042
9.7917395	1.00112750	2.08061607	-.0004120998
9.7868816	1.00068211	1.25872660	.0000897542
9.7838094	1.00038368	0.70802750	.0002432590
9.7813538	1.00007723	0.14251815	-.0002982824

A*A MATRIX:		A*L VEKTOR:
12.05132780	47.43049519	-.0002110399
47.43049519	265.29097340	.0018149428

AZ ISMERETLENEK:

```
d GAMMA =   .000149949478
d BETA  =  -.000033650300
```

A VONATKOZASI RENDSZER PARAMETEREI:

```
a       =   6378245.000  [m]
OMEGA   =   .7292116E-04 [1/s]
GAMMAe  =   9.780450     [m/s^2]
BETA    =   .005266350
f       =   .003403060                1/f  =  293.85
kM      =   .3986040E+15 [m^3/s^2]    M    =  .5974E+25  [kg]
U       =   .6263744E+08 [m^2/s^2]
```