Fizikai geodézia és gravimetria / 11.

GEODÉZIAI VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK, A VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK PARAMÉTEREINEK MEGHATÁROZÁSA.

A Föld geometriájának meghatározása mellet a geodézia feladata a földi nehézségi erőtér (szerkezetének, eloszlásának) meghatározása is. Továbbá, ha a földalak meghatározásába a tengereken és az egész Föld külső terében is mérhető fizikai jellegű mennyiségeket (pl. nehézségi méréseket, mesterséges hold észleléseket) is be akarunk vonni, akkor ezek eredményeinek feldolgozásához is viszonyítási alap, (az „előzetes érték” szerepét betöltő) „*vonatkoztatási erőtér*” szükséges. Erre a célra szolgál a Föld valódi nehézségi erőterét megközelítő, de viszonylag egyszerűen számítható, szabályos eloszlású (képzeletbeli) *normál nehézségi erőtér*, amelyet megfelelő matematikai eszközökkel alkotunk. Számszerű meghatározása geometriai adatok ismeretében fizikai jellegű (nehézségi) mérések eredményeiből lehetséges.

A Föld geometriájának és nehézségi erőterének meghatározásakor a geometriai és a fizikai jellegű méréseink eredményeit *együttesen* akarjuk feldolgozni. Ehhez olyan *közös* viszonyítási alap kell, amelyben a Föld normálalakja és a matematikailag meghatározott normál nehézségi erőtere *egyetlen közös* rendszernek, a *geodéziai földmodellnek* egy-egy eleme.

Ehhez úgy jutunk, hogy a Föld *M* tömegével megegyező tömegű (forgási és egyenlítői szimmetriás tömegeloszlású), a Föld méreteit jól megközelítő méretű testet képzelünk, amit tehetetlenségi főtengelye körül a Föld ω forgási szögsebességével megforgatunk. Ekkor a test felszínén és külső terében a Földéhez hasonló, ezt megközelítő, de forgási és egyenlítői szimmetriás eloszlású, szabályos nehézségi erőtér keletkezik. Ezt a képzeletbeli erőteret tekintjük *normál nehézségi erőtérnek.* Ennek térerőssége a γ *normál nehézségi térerősség* és potenciálja az *U normálpotenciál,* szintfelületei általában valamilyen szintszferoidok. A Föld *normálalakját* pedig a normál nehézségi erőtér egyik szintfelületeként értelmezzük. Gyakorlati okokból mindig törekszünk arra, hogy mind a normál nehézségi erőtér, mind a Föld normálalakja viszonylag egyszerű összefüggésekkel legyen matematikailag leírható. *Vonatkoztatási felületként* vagy az így, fizikailag meghatározott normálalakot, vagy a vele egyenlő tengelyhosszúságú forgási ellipszoidot használjuk (ha a kettő nem azonos). A fizikai geodéziában a vonatkoztatási felület mindig *geocentrikus* elhelyezésű.

Az így értelmezett *geodéziai földmodellt matematikailag meghatározó mennyiségek* (paraméterek) (mint, pl. a vonatkoztatási felület *a* mérete, *f* lapultsága (alakja), a Föld tömegét jellemző *kM* szorzat (az ún. geocentrikus gravitációs állandó), a Föld ω forgási szögsebessége, stb.) *számszerű értéksorát* **geodéziai vonatkoztatási rendszernek** (*Geodetic Reference System* = *GRS*) nevezzük. Meghatározása geometriai és fizikai jellegű mérési eredmények együttes feldolgozásával lehetséges.

A „*geodéziai vonatkoztatási rendszer”* fogalom a Föld geometriája és külső nehézségi erőtere meghatározásának viszonyítási alapjaként szolgáló földmodellnek a *számszerű jellemzőit* tartalmazza. A földmodell pedig közvetett módon magába foglalja a *földi térbeli derékszögű koordináta-rendszert”* (valamelyik megvalósulását és ennek keretpontjait) is.

Mindaddig, amíg helymeghatározási feladatainkat pusztán geometriai (szög és távolság) jellegű mérési eredményekre támaszkodva oldjuk meg, ezen geometriai jellegű mérések eredményeinek feldolgozásához elegendő a Föld ellipszoidi normálalakját *tisztán geometriai felületként* értelmezni (amelynek az anyaghoz semmi köze). Az ellipszoid mérete, alakja tisztán geometriai (szög- és távolság-) mérések eredményeiből meghatározható. Ennek hagyományos, legkorábban kialakult módszere pl. a *fokmérés* vagy a *felületek módszere*.

Az *egész Föld* elméleti alakját és nehézségi erőterét jól közelítő geodéziai földmodell – a Föld normálalakja és a normál nehézségi erőtér – meghatározása *geometriai és fizikai* jellegű mérési eredmények *együttes feldolgozását* lehetővé tevő *fizikai geodéziai módszerekkel* lehetséges.

A geodéziai vonatkoztatási rendszer meghatározásának egyik lehetősége a Föld valóságos potenciálfüggvényének sorbafejtésén alapuló módszer.

Ha a potenciálfüggvény gömbfüggvény-sora tagjainak összegezését valamely $n = k < \infty$, véges számnál abbahagyjuk (azaz a további, $n > k$ -ad fokú tagokat nullaértékűnek tekintjük, elhanyagoljuk), akkor a potenciálfüggvény pontos értéke (a valódi potenciál) helyett ennek *k.* fokú közelítését kapjuk, ami a *k* számtól függően többé-kevésbé jól közelíti meg a Föld valóságos nehézségi erőterét, viszont matematikailag jól kezelhető. A gyakorlati felhasználás érdekében általában arra törekszünk, hogy a normálpotenciál eloszlása lehetőleg egyszerű összefüggésekkel legyen leírható, ezért eleve elhagyjuk a gömbfüggvény-sornak a λ hosszúságtól is függő, $m > 0$ rendű (tesszerális) tagjait és a megmaradó forgásszimmetriás eloszlású, $m = 0$ rendű zonális tagok közül is csak a *páros* fokszámú tagokra korlátozódunk. Az így megmaradó gömbfüggvény-sor által leírt normál potenciálfüggvény és ennek szintfelületei (a szintszferoidok) *forgási és egyenlítői szimmetriát* mutatnak. Az így nyert *normálpotenciál* az

$$U_k = \frac{kM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{k}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n\, P_n(\sin\psi)\right] + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\psi\,; \quad n = 0, 2, 4, \ldots k \qquad (1)$$

függvénnyel írható le.

A Föld elméleti alakjának, a geoidnak a közelítőjét *normálszferoidnak* vagy *földi szferoidnak* nevezzük, ez a Föld *szferoidi normálalakja*. Ennek normálpotenciálértékét jelöljük, szokás szerint, U_0-val. A normálpotenciál függvényéhez is tartozik valamilyen erőtér, amely erőtérnek a potenciálját írja le. Ezt a képzeletbeli erőteret nevezzük *normál nehézségi erőtérnek.* A *normál nehézségi térerősség* $\boldsymbol{\gamma}$ vektorát a normálpotenciál $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{grad}\,U_k$ gradienseként értelmezzük.

A legegyszerűbb esetben $k = 2$-ig összegezzük a sor tagjait. Így jutunk a *Clairaut* által levezetett, és róla elnevezett

$$U_2 = \frac{kM}{r}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\, P_2(\sin\psi)\right] + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\psi = \text{állandó} \qquad (2)$$

***Clairaut*-féle szintszferoidokra**, vagy ha a normálpotenciál (1) gömbfüggvény-sora tagjainak összegezését $k = 4$-ig végezzük el, akkor az

$$U_4=\frac{kM}{r}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\, P_2(\sin\psi)-\left(\frac{a}{r}\right)^4 J_4\, P_4(\sin\psi)\right]+\frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\psi=\text{állandó} \quad (3)$$

egyenlettel jellemzett ***Helmert*-féle szintszferoidok** seregére jutunk. A (2) és a (3) gradiensét képezve a normál nehézségi erőtér térerősséget kapjuk a Clairaut, illetve a Helmert-féle szintszferoidra vonatkoztatva:

$$\gamma\approx\left|\frac{\partial U_2}{\partial r}\right|=\frac{kM}{r^2}\left[1-3\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\; P_2\sin\psi\right]-\omega^2 r\cos^2\psi\,, \quad (4)$$

illetve

$$\gamma\approx\left|\frac{\partial U_4}{\partial r}\right|=\frac{kM}{r^2}\left[1-3\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\; P_2\sin\psi-5\left(\frac{a}{r}\right)^4 J_4\, P_4(\sin\psi)\right]-\omega^2 r\cos^2\psi\,. \quad (5)$$

A (4)-be és az (5)-be beírva az ismert állandók értékét, átrendezés után az alábbi formára alakíthatók:

$$\gamma=\gamma_e(1+\beta\sin^2\varphi+...)\,, \quad (6)$$

$$\gamma=\gamma_e(1+\beta\sin^2\varphi+\beta_1\sin^2 2\varphi+...)\,, \quad (7)$$

ami a normál nehézségi gyorsulás ismert formájú összefüggése a Clairaut- és a Helmert-féle esetben.

A (2) és a (4) összefüggéseket az egyenlítőn ($\psi=0°$, $r=a$, $\gamma=\gamma_e$) és a pólusokon ($\psi=90°$, $r=b$, $\gamma=\gamma_p$) felírva:

$$\left.\begin{aligned}
U&=\frac{kM}{a}\left(1+\frac{1}{2}J_2\right)+\frac{1}{2}\omega^2 a^2\\
U&=\frac{kM}{b}\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2 J_2\right]\\
\gamma_e&=\frac{kM}{a^2}\left(1+\frac{3}{2}J_2\right)-\omega^2 a^2\\
\gamma_p&=\frac{kM}{b^2}\left[1-3\left(\frac{a}{b}\right)^2 J_2\right]
\end{aligned}\right\}, \quad (8)$$

amely 4 összefüggésből a $b=a(1-f)$ helyettesítéssel, a J_2 kiküszöbölésével levezethető az:

$$\left.\begin{aligned}
f&=\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}-\frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e}=\frac{5}{2}m+\beta\\
kM&=\gamma_e a^2(1-f+\frac{3}{2}m+...)\\
U&=\frac{kM}{a}\left(1+\frac{f}{3}+\frac{m}{3}+...\right)
\end{aligned}\right\}. \quad (9)$$

három alapösszefüggés. Benne a

$$a,\, f,\, kM,\, U,\, \beta,\, \gamma_e,\, \omega$$

hét meghatározó mennyiség szerepel. Ezen mennyiségek számszerű értéksora a **geodéziai vonatkoztatási rendszer** paraméterei a Clairaut-féle szintszferoid esetében. Kiszámításukra a három (9) egyenlet kevés, tehát négy ismeretlen mennyiségnek a Földre vonatkozó értékét más úton kell meghatározni. Közülük a Föld forgásának ω szögsebessége nagy pontossággal ismert. A Föld normálalakja a nagytengely-hosszának értékét átvehetjük a geometriai meghatározásokból (fokmérések, felületek módszere stb.). Harmadik és negyedik adatként γ_e és β értékét tapasztalati úton, a földfelszín minél nagyobb részét beborító nehézségi mérésekből határozhatjuk meg. A felvett négy mennyiség alapján a többi három meghatározó adat, vagyis f, kM és U a (9) összefüggésekből már számítható.

Jobb közelítést kapunk, ha *Helmert* nyomán a potenciálfüggvény végtelen sorából k = 4. fokig terjedő tagokat vesszük figyelembe. Ekkor a normál nehézségi erőtér potenciálját és vele a negyedfokú szintszferoidok egyenletét a (3) fejezi ki. A Föld negyedfokú szintszferoidként értelmezett normálalakjára vonatkozóan *Helmert* összesen 8 összefüggést állított fel a szferoid 13 jellemzője között. A szferoid meghatározásához tehát 5 mennyiségnek az értékét kell ismerni, illetve méréssel meghatározni.

A Föld normálalakja, bizonyos célszerűségi határokon belül, fizikai értelemben is önkényesen megválasztható. Erre a lehetőséget *Stokes* és *Poincaré* tétele adja meg. Ennek értelmében az adott ω szögsebességgel forgó M tömeg S külső szintfelületének önkényes felvétele után a felvett szintfelületen a γ *normál nehézségi térerősség*, illetve külső terében az *U normálpotenciál az* (*M, S,* ω) ún. *Stokes-féle elemek* függvényében egyértelműen számítható anélkül, hogy az M tömegnek S-en belüli eloszlásáról bármit is tudnánk. (A tömegeloszlást ugyanis az S szintfelület választott alakja már meghatározza, de ennek milyenségét nem kell ismernünk.) Ennek megfelelően tehát a normálpotenciálnak valamely szintfelületét, célszerűen éppen a Föld normálalakját önkényesen felvesszük, úgy, hogy céljainknak a legjobban megfeleljen.

A célszerűség pedig azt kívánja, hogy a Föld normálalakjaként éppen a geodéziai vonatkoztatási felületként szolgáló *forgási ellipszoidot* vegyük fel. Ha ezt a Föld M tömegével kitöltve képzeljük, továbbá feltételezzük, hogy kistengelye körül a Föld állandónak képzelt forgási sebességével forog, akkor ez az *ellipszoid alakú szintfelület* ***(szintellipszoid)*** lesz a *Föld normálalakja* és külső potenciálja a *normálpotenciál*. Az M tömegnek a felszínét képező szintellipszoidon belüli eloszlása ismeretlen.

Hangsúlyozzuk, hogy ez esetben az ellipszoid nem valamely szintszferoid közelítő felületeként szerepel, hanem ténylegesen *ellipszoid alakú szintfelület* felvételéről van szó. A normálpotenciálnak azonban csak *ez az egyetlen szintfelülete* lesz ellipszoid alakú, amit ennek vettünk fel, az összes többi külső szintfelülete az ellipszoidnál nagyobb lapultságú szintszferoid lesz.

A felvett méretű szintellipszoid felszínén a *normál nehézségi térerősség* eloszlása is már egyértelműen meghatározott (a tömegeloszlás ismeretétől függetlenül) és *Somigliana*

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2\varphi + b\gamma_p \sin^2\varphi}{\left(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}} \tag{10}$$

zárt képletéből nyerhető, ahol φ az ellipszoidi földrajzi szélesség és $\gamma_p = \gamma_e\,(1+\beta)$.

Mint az előzőekben láttuk, geodéziai földmodell, a szintellipszoid és külső nehézségi erőtere négy kiinduló mennyiségnek a Földre vonatkozó értékéből határozható meg. Ezek viszont gyakorlatilag csak mérésekből vezethetők le, így elkerülhetetlenül hibával terheltek. Mivel mérési módszereink és műszereink egyre tökéletesednek, a kiinduló mennyiségeknek is egyre pontosabb értékét ismerjük meg, amelyekből újabb és újabb geodéziai vonatkoztatási rendszereket határoztak meg (GRS67, GRS80, stb.). Ezek mind annak az egyetlen – ideális (elképzelt) – geodéziai vonatkoztatási rendszernek az egyre jobb megközelítői (realizációi), melynek kiinduló mennyiségei *pontosan (hibátlanul) megegyeznek a Föld megfelelő fizikai jellemzőjével.*

A Föld valódi (hibátlan, vagy pontos) kiinduló adataiból meghatározott szintellipszoidot nevezzük ***közepes földi ellipszoidnak***. Ez a Föld *legjobb* ellipszoidi közelítője mind geometriai, mind fizikai értelemben.

Geometriai értelemben kielégíti a simulásnak mind a geoid-ellipszoid távolságok, mind pedig a függővonal-elhajlások négyzetösszegének minimum feltételét.

Fizikai értelemben kielégíti a nehézségi-rendellenességek négyzetösszegére vonatkozó minimum feltételt, és nehézségi erőtere a Föld külső nehézségi erőterét jól közelíti, ugyanis a normál potenciálfüggvény gömbfüggvénysorának $n = 0$ -tól $n = 2$ -ig terjedő tagjai a Földével megegyeznek.

Mindezek mellett a közepes Földi ellipszoid fogalmán keresztül szabatosan és egyértelműen értelmezhetővé válik a „*Föld egyenlítői félátmérője*” „*a Föld lapultsága*” és a „*földi egyenlítői nehézségi érték*” fogalma is.

Az eddigi gyakorlat által meghatározott vonatkoztatási rendszerek, ill. ezek alapfelületét képező vonatkoztatási ellipszoidok a közepes földi ellipszoid többé-kevésbé jó megközelítői.