

Nutzung von Computern bei Ausgleichungsrechnungen schwach besetzter Matrizen von großem Ausmaß

Lajos Völgyesi, Budapest

Mit der Entwicklung der Computertechnik nimmt auch der Anspruch, lineare Gleichungssysteme immer größeren Ausmaßes zu lösen überproportional zu. Dem Lösen solcher linearer Gleichungssysteme setzt nur die fehlende Arbeitsspeicherkapazität des Computers (RAM) Grenzen.

1. Problemstellung

Mit dem linearen Zuwachs der Anzahl der Unbekannten in der Ausgleichungsrechnung nimmt die Anzahl der Koeffizienten der Normalgleichungen quadratisch zu. Die Behandlung der Matrizen von großem Ausmaß wird in der Mehrheit der Ausgleichungsaufgaben aber trotzdem möglich, da die Matrizen normalerweise sehr viele Null-Elemente haben. Solche Matrizen werden als schwach besetzt (sparse) bezeichnet. In Ausgleichungsrechnungen vorkommende sparse Matrizen sind im Allgemeinen Schleifenmatrizen spezieller Form (die Nicht-Null-Elemente befinden sich in der Hauptdiagonalen oder in dazu parallelen Linien). In unseren Untersuchungen nehmen wir in der Struktur der sparse Matrizen keinerlei Regelmäßigkeit an.

Für das Lösen linearer Gleichungssysteme und für das Invertieren einer Matrix sind zahlreiche numerische Methoden bekannt (Detreköi, 1991). Diese sind auch im Falle der sparse Matrizen anwendbar, allerdings wegen der vielen Null-Elemente nicht zweckmäßig. Es ist zu erwähnen, daß die Inverse einer sparse Matrix normalerweise keine sparse Eigenschaft besitzt (Gergely, 1974). Infolgedessen ist im Fall von Ausgleichungsaufgaben mit schwach besetzter Koeffizientenmatrix der Verbesserungsgleichungen eine unmittelbare Lösung unkomplizierter als Bilden und Invertieren der Normalgleichungen. Für die unmittelbare Lösung ist die Orthogonalisierung der Matrix eine Möglichkeit (Charamza, 1971; Völgyesi, 1979, 1980), die die Unbekannten der Verbesserungsgleichungen ohne Normalgleichungen direkt liefert. Im Falle der Anwendung der Matrix-Orthogonalisierung gibt es für die Anzahl der Unbekannten nur eine Begrenzung: im Arbeitsspeicher müssen mindestens zwei vollständige Spalten der Matrix Platz finden.

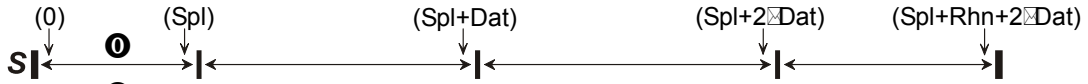
2. Platzsparende Bildung der Verbesserungsgleichungen

Im Folgenden zeigen wir ein Verfahren, mit dem, im Falle schwach besetzter Koeffizientenmatrizen, Ausgleichungsaufgaben mit hoher Unbekanntenzahl mittels Matrix-Orthogonalisierung lösbar sind.

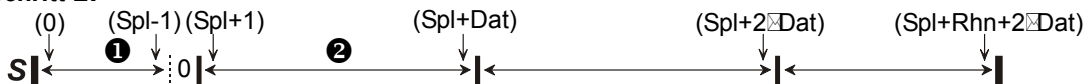
Die Darstellung von Matrix A und Vektor I in dem Hilfsvektor s :

Spl = Anzahl der Spalten, Rhn = Anzahl der Reihen,
Dat = Anzahl der nicht Null Matrixelemente in der Matrix A

Schritt 1:



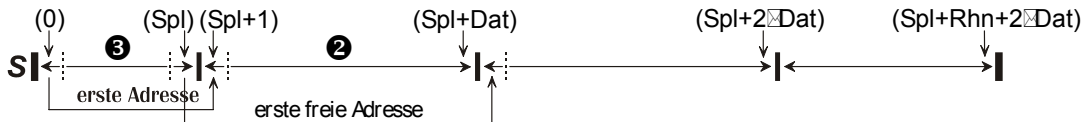
Schritt 2: 0 = reine Null Elementen



1 = zeigt der Reihe nach, wieviel nicht Null Matrixelement in den einzelnen Spalten in der Matrix A vorkommt

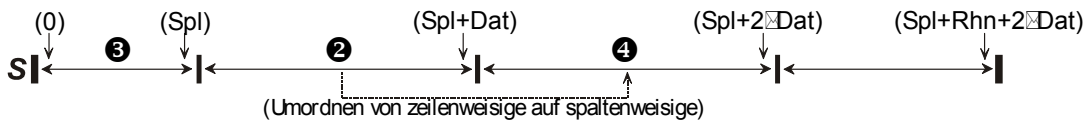
2 = zeilenweise: $\pm 1000 * \text{Spaltenindex} + \text{Reihenindex} + 0.1 * \text{Matrixelement}$

Schritt 3:



3 = zeigt die Adresse derjenigen Zellen, wo in der letzten Phase in 4 und in 6 neue Spaltenindizes anfangen

Schritt 4:

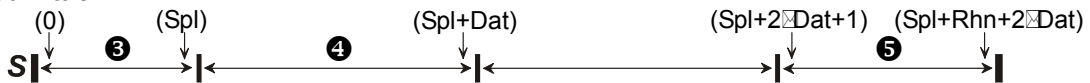


4 = spaltenweise: $\pm 1000 * \text{Spaltenindex} + \text{Reihenindex} + 0.1 * \text{Matrixelement}$

Schritt 5:

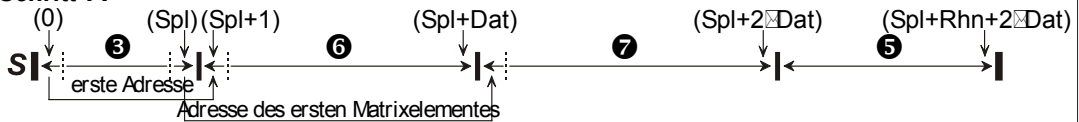


Schritt 6:



5 = Vektor der rechten Seite (der Absolutglieder)

Schritt 7:



3 = zeigt die Adresse derjenigen Zellen, wo in 6 neue Spaltenindizes anfangen

6 = nur Reihenindizes spaltenweise

7 = nur die Elemente von Matrix A spaltenweise

5 = Vektor der rechten Seite (der Absolutglieder)

Abb. 1: Die Darstellung von Matrix A und Vektor I in dem Hilfsvektor s

Der erste Schritt

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l} \quad (1)$$

ist die entsprechende platzsparende Bildung der Formmatrix \mathbf{A} und des Vektors der Absolutglieder \mathbf{l} . Zum Zweck platzsparender Speicherung speichern wir in einem Hilfsvektor \mathbf{s} die Elemente sowohl der Matrix \mathbf{A} als auch des Vektors \mathbf{l} , wie *Abb. 1* es zeigt.

Es ist sehr wichtig, dass man bei der Formulierung der Verbesserungsgleichungen die Elemente der Matrix \mathbf{A} zeilenweise bestimmen kann. Deswegen muss im ersten Schritt der entsprechende Teil des \mathbf{s} Hilfsvektors genauso zeilenweise einsetzbar sein. Weiterhin muss man während der Matrix-Orthogonalisierung die entsprechenden orthogonalisierten Transformationen in den Spalten durchführen. Deswegen muss man später innerhalb des \mathbf{s} Vektors von der zeilenweisen Speicherungsmethode zu der spaltenweisen Speicherungsmethode übergehen.

Wenn die Matrix \mathbf{A} der Verbesserungsgleichungen (1) viele Nullelemente enthält, ist es zweckmäßig, nur die Nicht-Nullelemente anzugeben. In diesem Fall muss man aber die Zeilen- und Spaltenkoordinaten der Nicht-Nullelemente (innerhalb der Matrix) anführen, die für jedes Nicht-Nullelement weitere zwei Speicherplätze beanspruchen würden.

Im Laufe der tatsächlichen Lösung der Ausgleichungsaufgaben bildet man zunächst den Hilfsvektor \mathbf{s} (siehe *Abb. 1*)! Die Länge des Hilfsvektors \mathbf{s} beträgt: $Rhn+Spl+2*Dat+1$, wo Rhn = Anzahl der Reihen der Matrix \mathbf{A} (Anzahl der Gleichungen), Spl = Anzahl der Spalten der Matrix \mathbf{A} (Anzahl der Unbekannten), Dat = Anzahl der Nicht-Nullelemente in der Matrix \mathbf{A} .

Der in *Abb. 1* dargestellte erste Schritt ist das Bilden des Vektors \mathbf{s} und die Auffüllung der ersten $Spl+1$ Elemente mit Nullelementen. Die Größe des Vektors \mathbf{s} sollte so groß wie möglich gewählt werden (der Kapazität des Computers entsprechend), da man noch nicht den Wert des Dat Parameters kennt.

Der zweite Schritt besteht in der Bildung der Elemente der Formmatrix \mathbf{A} , und in der speziellen Anordnung der Nicht-Nullelemente im Vektor \mathbf{s} . Während man die Elemente der Matrix \mathbf{A} in der Form

$$\pm 10000 * Spaltenindex + Reihenindex + 0.1 * matrixelement \quad (2)$$

von der Speicheradresse des Vektors \mathbf{s} , $Spl+1$, anordnet, erhöht man zugleich im Laufe des Einschreibens der einzelnen Matrixelemente den Wert des Zählers der Spalten in den entsprechenden Zellen von $1 \dots Spl$. So erhält man nach Bildung der Matrixelemente in den Zellen $1 \dots Spl$ die Anzahl der Nicht-Nullelemente in den einzelnen Spalten der Matrix \mathbf{A} .

Sollte höhere Genauigkeit gewünscht sein, kann man die Speicheradresse $Spl+1$ und den $10000 * Spaltenindex + Reihenindex$ und die dazu gehörenden \pm *Matrixelementwerte* paarweise getrennt speichern. So belegt man für die Reihen- und Spaltenindizes keine wertvollen Dezimalen (anstatt der Matrizenkoeffizienten).

Im dritten Schritt formen wir den Inhalt der $0 \dots Spl+1$ Speicherzellen um, und der Anzahl der in den einzelnen Spalten auffindbaren Nicht-Nullelementen der Matrix zufolge (diese der Reihe nach summierend) bestimmt man, mit welchen Speicheradressen die zu den neuen Spaltenindizes gehörenden Reihenindizes und Matrixelemente in dem Bereich $Spl+1 \dots Spl+Dat$ des Vektors \mathbf{s} nach dem 7. und letzten Schritt anfangen.

Im vierten Schritt überträgt man die zeilenweise gespeicherten Daten (2) Typ vom Bereich $Spl+1 \dots Spl+Dat$ - in spaltenweise gespeicherte Daten umgestellt - in den Speicherbereich $Spl+Dat+1 \dots Spl+2*Dat$ des Vektors \mathbf{s} .

Im fünften Schritt werden die Daten des Bereiches $Spl+Dat+1 \dots Spl+2*Dat$ des Vektors auf den ursprünglichen Speicherbereich $Spl+1 \dots Spl+Dat$ ohne Veränderung zurück übertragen.

Im sechsten Schritt bildet man den Vektor \mathbf{l} des Absolutgliedes und setzt diese Werte zeilenweise in den Bereich $Spl+2*Dat+1 \dots Spl+Rhn+2*Dat$ des Vektors \mathbf{s} ein.

Im siebten und letzten Schritt trennen wir die Daten des Bereiches $Spl+1 \dots Spl+Dat$ des Vektors \mathbf{s} in Reihenindizes und Matrixelemente. Die Reihenindizes werden spaltenweise in den Bereich $Spl+1 \dots Spl+Dat$ des Vektors \mathbf{s} und die Matrixelemente in den Bereich $Spl+Dat+1 \dots Spl+2*Dat$ gespeichert.

So erhält man die in der *Abb. 1* dargestellte endgültige Struktur des Vektors \mathbf{s} :

- im Bereich $0 \dots Spl$ findet man, der Reihe nach, wo die neuen Spaltenindizes im Vektor \mathbf{s} anfangen ($Spl+1$ ist die Adresse des ersten Gliedes der Matrix)
- im Bereich $Spl+1 \dots Spl+Dat$ findet man, der Reihe nach, spaltenweise die zum jeweiligen Matrixelement gehörenden Reihenindizes,
- im Bereich $Spl +Dat+1 \dots Spl+2*Dat$ speichert man spaltenweise die Elemente der Matrix,
- im Bereich $Spl+2*Dat+1 \dots Spl+Rhn+2*Dat$ findet man die Absolutglieder.

3. Grundprinzip des Verfahrens der Matrix-Orthogonalisierung

Der nächste Schritt ist die Vorbereitung der Daten für das Ausgleichungsverfahren mittels Matrix-Orthogonalisierung. Dazu muss man aber das Grundprinzip des Verfahrens kennen (Charamza 1971, Strang 1976, Völgyesi 1979, 1980).

Es wird von der

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \hline (n,r) & (n,1) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline (r,r) & (r,1) \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W} & \mathbf{v} \\ \hline (n,r) & (n,1) \\ \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{x} \\ \hline (r,r) & (r,1) \end{array} \right] \quad (3)$$

Hypermatrix-Transformation veranschaulicht, wo: \mathbf{A} die Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen, \mathbf{l} Vektor der Absolutglieder, \mathbf{E} Einheitsmatrix, $\mathbf{0}$ Nullvektor, \mathbf{W} Matrix mit Orthogonalspalten, \mathbf{G}^{-1} obere Dreiecksmatrix.

Für die Veranschaulichung des Algorithmus der Transformation (3) führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: \mathbf{a}_j : Spalte j der Matrix \mathbf{A} , \mathbf{w}_j : Spalte j der Matrix \mathbf{W} , \mathbf{e}_j : Spalte j der Matrix \mathbf{E} , \mathbf{g}_j : Spalte j der Matrix \mathbf{G}^{-1} . Mit diesen Beziehungen führt man die Matrixtransformation (3) in den folgenden Schritten durch:

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{g}_1 \end{array} \right] = \frac{\left[\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{e}_1 \end{array} \right]}{\|\mathbf{a}_1\|_E}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{array} \right]_{\langle 1 \rangle} = \left[\begin{array}{l} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{array} \right]_{\langle k+1 \rangle} = \left[\begin{array}{l} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{array} \right]_{\langle k \rangle} - \left((\mathbf{a}_j)_{\langle k \rangle}, \mathbf{w}_k \right) \left[\begin{array}{l} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{g}_k \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \mathbf{w}_j^* \\ \mathbf{g}_j^* \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{array} \right]_{\langle j \rangle} \\ \left[\begin{array}{l} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{g}_j \end{array} \right] = \frac{\left[\begin{array}{l} \mathbf{w}_j^* \\ \mathbf{g}_j^* \end{array} \right]}{\|\mathbf{w}_j^*\|_E} \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$j = 2, 3, \dots, r; \quad k = 1, 2, \dots, j-1$$

weiterhin

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \mathbf{l} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] - \sum_{k=1}^r \left(\mathbf{l}, \mathbf{w}_k \right) \left[\begin{array}{l} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{g}_k \end{array} \right] \quad (5)$$

wo $\|\mathbf{a}_1\|_E$ und $\|\mathbf{w}_j^*\|_E$ die Euklidische Norm der Spaltenvektoren \mathbf{a}_1 bzw. \mathbf{w}_j^* , die $\left((\mathbf{a}_j)_{\langle k \rangle}, \mathbf{w}_k \right)$ und $\left(\mathbf{l}, \mathbf{w}_k \right)$ das Skalarprodukt der Spaltenvektoren $(\mathbf{a}_j)_{\langle k \rangle}$ bzw. \mathbf{w}_k und der Vektoren \mathbf{l} und \mathbf{w}_k .

Die Matrizen­transformation (3) liefert die gesuchten Unbekannten \mathbf{x}_i und \mathbf{v}_i Verbesserungen an der Stelle der Vektoren \mathbf{x} bzw. \mathbf{v} unmittelbar. Die Varianz und Kovarianz der Unbekannten \mathbf{x}_i enthält die Gewichtskoeffizientenmatrix

$$\mathbf{Q}_{(\mathbf{x})} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{G}^{-1})^*$$

wo $(\mathbf{G}^{-1})^*$ die Transponierte der Matrix \mathbf{G}^{-1} bezeichnet.

Mit der Betrachtung weiterer Einzelheiten des Ausgleichungsverfahrens mittels Matrix-Orthogonalisierung beschäftigen wir uns nicht, da diese in früheren Publikationen auffindbar sind.

4. Praktische Ausführung der Orthogonalisierung

In Kenntnis des obigen sollen wir nach den Elementen des Vektors \underline{s} die Spalten der Hypermatrix

$$\hat{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{matrix} (n,r) & (n,1) \\ (r,r) & (r,1) \end{matrix}$$

darstellen. Die Spalten von $\hat{\mathbf{A}}$ soll man schon mit dem Einschreiben der Nullelemente darstellen, und in ihrer Reihenfolge einzeln in Außenspeichern anordnen. Wenn alle Spalten in Außenspeichern angeordnet wurden, kann man mit der Orthogonalisierung nach dem Algorithmus (4) und (5) anfangen: Man liest die erste neue Spalte ein. Nach der Normalisierung schreibt man sie in den Außenspeicher zurück. Dann liest man die neue und die erste (normalisierte) Spalte ein, orthogonalisiert die zweite auf der ersten Spalte, normalisiert und schreibt zurück in den Außenspeicher; man liest die erste normalisierte und die dritte neue Spalte ein; orthogonalisiert die dritte auf der ersten Spalten, liest die zweite (auf der ersten Spalte orthogonalisierte und normalisierte) Spalte an die Stelle der ersten Spalte, orthogonalisiert auch auf dieser zweiten Spalte die dritte, nach der Normalisierung schreibt man zurück in den Außenspeicher; ... dies setzt man solange fort, bis die letzte Spalte auch auf allen vorstehenden Spalten orthogonal steht. Die letzte Spalte darf man aber nicht normalisieren. So enthalten die ersten n Elemente der letzten Spalte die Verbesserungen, die letzten r Elemente die gesuchten Unbekannten.

Weil die tatsächliche Orthogonalisierung im Arbeitsspeicher stattfindet, setzt dem Grad der zu lösenden Aufgaben (der maximalen Anzahl der Unbekannten) im Falle des obigen Prinzips eine Grenze, dass wir im Arbeitsspeicher für zwei ganze Matrixenspalten Platz haben müssen. Die Geschwindigkeit der Berechnungen ist erhöhbar, wenn im Arbeitsspeicher während der Orthogonalisierung gleichzeitig mehrere Spalten Platz haben.

5. Anwendungen

Das obige Prinzip wurde erfolgreich auf das Lösen der Ausgleichung von Schwerenetze und der Lotabweichungsinterpolation auf Grund der Messungen der Drehwaage angewendet.(Völgyesi, 1995). Beim Lösen beider Problemen haben sich günstige Erfahrungen ergeben, im Falle einer großen Anzahl von Unbekannten sowohl in Hinsicht sowohl der numerische Stabilisation als auch der Zeitdauer der Rechnungen.

Der Verfasser spricht dem (Nationalen Fond für Wissenschaftliche Forschungen (OTKA) Nr. T 030177 und der Forschungsgruppe für Physikalische Geodäsie und Geodynamik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften seinen Dank aus für die Unterstützung der obigen Untersuchungen.

Literatur

1. *Charamza F.*: Orthogonalization Algorithm ... *Geofizikálni Sbornik* Vol. XIX, (1971)
2. *Detrekői Á.*: Kiegyenlítő Számítások. Tankönyvkiadó, Budapest (1991)
3. *Gergely J.*: Numerikus modellek sparse mátrixokra. *MTA SZTAKI tanulmányok* No.26. (1974)
4. *Strang G.*: Linear Algebra and its Applications. *Academic Press*, New York, ... pp. 414 (1976)
5. *Völgyesi L.*: A numerikus modellek választásának néhány kérdése ... *Geod. és Kart.* Vol. 31, No.5., pp. 327-334 (1979)
6. *Völgyesi L.*: A mátrix-ortogonalizációs módszer gyakorlati alkalmazása a kiegyenlítő számításban. *Geod. és Kart.* Vol. 32, No. 1. pp. 7-15 (1980)
7. *Völgyesi L.*: Test Interpolation of Deflection of the Vertical *Periodica Polytechnica, Civil Eng.* Vol. 39, No. 1. pp. 37-75 (1995)

* * *

Anschrift des Verfassers:

Dr. LAJOS VÖLGYESI

Technische und Wirtschaftswissenschaftliche Universität Budapest

Lehrstuhl für Vermessungskunde und Höhere Geodäsie

H-1521 Budapest

E-mail: lvolgyesi@epito.bme.hu

Zusammenfassung

In der Mehrheit der Ausgleichungsaufgaben enthalten die Formmatrizen normalerweise sehr viele Nullelemente. In diesem Fall stellen wir für die Bildung der Verbesserungsgleichungen ein platzsparendes Verfahren vor, das ermöglicht die Behandlung von Matrizen großen Ausmaßes. In diesem Fall ist ein zweckmäßiges Lösungsverfahren die Anwendung des Ausgleichungsverfahrens mittels Matrix-Orthogonalisierung, das die Unbekannten aus den Verbesserungsgleichungen - die Aufstellung der Normalgleichungen vermeidend - unmittelbar liefert.

Summary

In majority of adjustment problems matrices of observation equations contain a lot of zero elements. It is presented a special method for creation of observation equations which give us a good possibility to treat large sparse matrices by computers in adjustment. Matrix orthogonalization is a suitable adjustment method in this case, which serves the unknowns directly from the observation equations, evading creation of normal equations.

* * *

Völgyesi L.(2001) [Nutzung von Computern bei Ausgleichsrechnungen schwach besetzter Matrizen von großem Ausmaß](#). Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Nr. 2, pp. 46-49.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.
Web: <http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi> E-mail: volgyesi@eik.bme.hu