

# A NEHÉZSÉGI ERŐTÉR 3D POTENCIÁLFÜGGVÉNYÉNEK INVERZIÓS ELŐÁLLÍTÁSA

Dobróka Mihály\*, Völgyesi Lajos\*\*,\*\*



## *Inversion reconstruction of 3D gravity potential based on torsion balance measurements*

- Inversion reconstruction of 3D gravity potential based on each of the torsion balance and gravity measurements, deflections of the vertical and digital terrain model data have been solved by developing our former 2D solution. Applying this method the elements of the full Eötvös-tensor including the vertical gradients can be determined not only in the torsion balance stations, but anywhere in the surroundings of these points. This gives a simple possibility to transform the torsion balance measurements to different heights and the analytical determination of the equipotential surfaces of the gravity field.

**Keywords:** inversion, torsion balance measurements, Eötvös-tensor, deflection of the vertical, potential function, gravity gradients

Az általunk korábban kidolgozott 2D eljárás továbbfejlesztésével megoldottuk a nehézségi erőter 3 dimenziós potenciálfüggvényének inverziós előállítását Eötvös-inga mérési adatok, nehézségi gyorsulás mérések, függővonal-elhajlás értékek és digitális terepmodell adatok együttes felhasználásával. A módszerrel nem csupán az Eötvös-inga mérési pontokban, hanem ezek környezetében is meghatározható a teljes Eötvös-tenzor, és így megkaphatjuk az Eötvös-ingával közvetlenül nem mérhető vertikális gradiens értékeket is. Ezzel egyszerű lehetőség adódik az Eötvös-inga mérések átszámítására különböző magasságokra, és megoldható a nehézségi erőter potenciál szintfelületeinek analitikus meghatározása.

**Kulcsszavak:** inverzió, Eötvös-inga mérések, Eötvös-tenzor, függővonal-elhajlás, potenciálfüggvény, gradiensek

## 1 Bevezetés

Magyarországon a múlt században a közel 60000 Eötvös-inga mérést végeztek elsősorban ásványi nyersanyagok kutatása céljából. Napjainkban erre a célra már lényegesen hatékonyabb kutatási módszereket alkalmaznak, ezért az Eötvös-inga mérések geofizikai hasznosítása helyett a geodéziai hasznosítás került előtérbe. A geofizikai alkalmazások céljára korábban csak a  $W_{zx}$  és a  $W_{zy}$  horizontális gradienseket dolgozták fel, a  $W_{\Delta}$  és  $W_{xy}$  görbületi adatok eddig feldolgozatlanok maradtak. A geodéziában viszont éppen a görbületi gradiensek alapján számíthatók függővonal-elhajlások, amelyeknek többek között a geoid finomszerkezetének meghatározása szempontjából van nagy jelentősége (Völgyesi 1993, 1995, 2001, 2005).

Az Eötvös-inga mérések geodéziai célú felhasználási lehetőségei a legutóbbi időkben tovább bővültek (Völgyesi et al. 2005). A  $W_{zx}$  és a  $W_{zy}$  horizontális gradiensek felhasználásával a nehézségi erőter, illetve a gravitációs anomáliák határozhatók meg interpolációval (Völgyesi et al. 2004, 2007), a  $W_{zx}$  és a  $W_{zy}$  horizontális gradiensek és a  $W_{\Delta}$  és  $W_{xy}$  görbületi adatok együttes felhasználásával pedig a vertikális gradiensek állíthatók elő az Eötvös-inga mérési pontokban (Haalck 1950, Tóth et al. 2004, 2005, Tóth 2007).

Valamennyi probléma megoldása szempontjából nagy jelentősége van a potenciálfüggvény előállításának. Amennyiben meg tudjuk határozni a nehézségi erőter potenciálfüggvényét, ebből meg-

\* Miskolci Egyetem, Geofizikai Tanszék, H-3515 Miskolc-Egyetemváros,  
E-mail: dobroka@gold.uni-miskolc.hu

\*\* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék, H-1521 Budapest  
\*\*\* Magyar Tudományos Akadémia Felsőgeodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport, H-1521 Budapest  
E-mail: volgyesi@eik.bme.hu

felelő irányú első deriváltakkal elő tudjuk állítani az erőter vektorának összetevőit, a második deriváltak pedig az Eötvös-tenzor elemeit adják. Az általunk korábban kidolgozott 2D eljárással megoldottuk a  $W_{\Delta}$  és a  $W_{xy}$  Eötvös-inga mérések alapján a nehézségi erőter potenciálfüggvényének és a potenciálfüggvény valamennyi fontos deriváltjának inverziós előállítását (Dobróka és Völgyesi 2005, 2008). Az alábbiakban a 2D eljárás továbbfejlesztésével a nehézségi erőter 3D potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciójára adunk megoldást. A 3D inverziós algoritmus ellenőrzésére a Szabadszállás-Kiskőrös környéki közel 750 km<sup>2</sup> kiterjedésű területen végeztünk kísérleti számításokat. A javasolt módszerrel lehetőség nyílik az eddig alkalmazott interpolációs módszerek pontosságát felülmúló számítások elvégzésére és a korábban alkalmazott eljárások során felmerülő bizonyos problémák áthidalására. Ezzel kapcsolatos kutatásainkban több részletkérdés még tisztázásra szorul, azonban a módszer bizonyítottan jól működik.

## 2 Az inverziós algoritmus

Írjuk fel a nehézségi erőter potenciálfüggvényét valamely  $\Psi_1, \dots, \Psi_p$  bázisfüggvény rendszer szerinti sorfejtés alakjában:

$$W(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i(x) \Psi_j(y) \Psi_k(z), \quad (1)$$

ahol  $l = i + (j-1) \cdot N_x + (k-1) \cdot N_x \cdot N_y$ .

Bázisfüggvényekként pl. hatványfüggvényeket alkalmazhatunk. Az 1 index a konstans tagot jelöli, és mivel a potenciál konstans erejéig egyértelmű ezért az  $i=j=k=1$  kizárható.

Az (1) potenciál második deriváltjaiként egyszerűen előállíthatjuk az Eötvös-ingával mérhető görbüeti adatok-, illetve a horizontális gradiensek elméleti értékeit:

$$\left. \begin{aligned} \text{számított } W_{xy} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i'(x) \Psi_j'(y) \Psi_k(z) \\ \text{számított } W_{\Delta} &= W_{yy} - W_{xx} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \left\{ \Psi_j''(y) \Psi_i(x) - \Psi_j(y) \Psi_i''(x) \right\} \Psi_k(z) \\ \text{számított } W_{zx} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i'(x) \Psi_j(y) \Psi_k'(z) \\ \text{számított } W_{zy} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i(x) \Psi_j'(y) \Psi_k'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Vezessük be a  $q$ -ik  $(x_q, y_q, z_q)$  mérési pontban az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} S_{ql} &= \Psi_i'(x_q) \Psi_j'(y_q) \Psi_k(z_q) \\ Q_{ql} &= \left\{ \Psi_j''(y_q) \Psi_i(x_q) - \Psi_j(y_q) \Psi_i''(x_q) \right\} \Psi_k(z_q) \\ D_{ql} &= \Psi_i'(x_q) \Psi_j(y_q) \Psi_k'(z_q) \\ F_{ql} &= \Psi_j'(y_q) \Psi_i(x_q) \Psi_k'(z_q), \end{aligned} \quad (3)$$

amelyekkel a (2) Eötvös-inga adatok a  $q$ -ik pontban:

$$\text{számított } W_{xy}^{(q)} = \sum_{l=1}^M B_l S_{ql}, \quad \text{számított } W_{\Delta}^{(q)} = \sum_{l=1}^M B_l Q_{ql}, \quad \text{számított } W_{zx}^{(q)} = \sum_{l=1}^M B_l D_{ql}, \quad \text{számított } W_{zy}^{(q)} = \sum_{l=1}^M B_l F_{ql}, \quad (4)$$

ahol  $M = N_x N_y N_z - 1$  a sorfejtési együtthatók száma,  $S_{ql}, Q_{ql}, D_{ql}, F_{ql}$  pedig ismertek.

Az inverziós eljáráshoz szükséges első deriváltak:

$$\begin{aligned} \text{számított } W_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i(x) \Psi_j(y) \Psi_k'(z) \\ \text{számított } W_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i'(x) \Psi_j(y) \Psi_k(z) \\ \text{számított } W_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i(x) \Psi_j'(y) \Psi_k(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Alkalmazzuk a  $q$ -ik  $(x_q, y_q, z_q)$  mérési pontban az alábbi jelöléseket:

$$A_{ql} = \Psi_i(x_q) \Psi_j(y_q) \Psi_k'(z_q), \quad C_{ql} = \Psi_i'(x_q) \Psi_j(y_q) \Psi_k(z_q), \quad H_{ql} = \Psi_i(x_q) \Psi_j'(y_q) \Psi_k(z_q). \quad (6)$$

Ezek szintén kiszámolható és mátrixba foglalható elemek, amelyekkel a számított első derivált adatok a  $q$ -ik pontban:

$$\text{számított } W_z^{(q)} = \sum_{l=1}^M B_l A_{ql}, \quad \text{számított } W_x^{(q)} = \sum_{l=1}^M B_l C_{ql}, \quad \text{számított } W_y^{(q)} = \sum_{l=1}^M B_l H_{ql}, \quad (7)$$

ahol  $M = N_x N_y N_z - 1$  a sorfejtési együtthatók száma,  $A_{ql}, C_{ql}, H_{ql}$  pedig ismertek.

A mért és a számított értékekből alkotott eltérés vektorok elemei a második derivált adatokra:

$$\begin{aligned} e_q^{(1)} &= \text{mért } W_{xy}^{(q)} - \sum_{l=1}^M B_l S_{ql}, & e_q^{(2)} &= \text{mért } W_{\Delta}^{(q)} - \sum_{l=1}^M B_l Q_{ql}, \\ e_q^{(3)} &= \text{mért } W_{zx}^{(q)} - \sum_{l=1}^M B_l D_{ql}, & e_q^{(4)} &= \text{mért } W_{zy}^{(q)} - \sum_{l=1}^M B_l F_{ql} \end{aligned} \quad (8)$$

az első derivált adatokra pedig:

$$e_q^{(5)} = \text{mért } W_z^{(q)} - \sum_{l=1}^M B_l A_{ql}, \quad e_q^{(6)} = \text{mért } W_x^{(q)} - \sum_{l=1}^M B_l C_{ql}, \quad e_q^{(7)} = \text{mért } W_y^{(q)} - \sum_{l=1}^M B_l H_{ql}, \quad (9)$$

ahol a  $\text{mért } W_z^{(q)}$  a nehézségi gyorsulás graviméterrel mérhető értéke, és a  $\text{mért } W_x^{(q)}$  és  $\text{mért } W_y^{(q)}$  pedig csillagászati függővonal elhajlásokból számítható értékek. (Az első deriváltak a függővonal-elhajlásból:  $W_x = -g\xi + U_x$  és  $W_y = -g\eta + U_y$ , ahol  $U$  az ellipszoidi normáltér ismert potenciálfüggvénye,  $g$  az átlagos nehézségi gyorsulás,  $\xi$  és  $\eta$  pedig a függővonal-elhajlás összetevők.)

A minimalizálandó függvény legyen az eltérésvektor  $L_2$  normája:

$$E = \sum_{s=1}^7 \sum_{q=1}^{N_s} (e_q^{(s)})^2, \quad (10)$$

ahol  $N_s$  az  $s$ -ik típusú adatok száma. Vektoros írásmódot alkalmazva vezessük be a

$$\mathbf{d}^{(\text{mért})} = \left\{ W_{xy}^{(1)}, \dots, W_{xy}^{(N_1)}, W_{\Delta}^{(1)}, \dots, W_{\Delta}^{(N_2)}, W_{zx}^{(1)}, \dots, W_{zx}^{(N_3)}, \dots, W_y^{(1)}, \dots, W_y^{(N_7)} \right\} \quad (11)$$

jelölést. Az  $S_{ql}, Q_{ql}, D_{ql}, F_{ql}$  valamint az  $A_{ql}, C_{ql}, H_{ql}$  értékeket egyetlen (az ún. Jakobi-együtthatómátrixba) foglalva:

$$G_{qj} = \begin{cases} S_{qj} & q \leq N_1 \\ \vdots & \\ H_{qj} & \sum_{s=1}^6 N_s < q \leq \sum_{s=1}^7 N_s \end{cases}. \quad (12)$$

A mért és a számított értékek eltérése:

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}^{(mért)} - \mathbf{GB}, \quad (13)$$

és ezzel a (10) szerint:

$$E = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum_{q=1}^N e_q^2 \quad (\text{ahol: } N = \sum_{s=1}^7 N_s). \quad (14)$$

Az így definiált inverz feladat megoldását a

$$\frac{\partial E}{\partial B_l} = 0, \quad (l=1, \dots, M) \quad (15)$$

feltételrendszer alapján felállított

$$\mathbf{G}^T \mathbf{GB} = \mathbf{G}^T \mathbf{d}^{(mért)} \quad (16)$$

egyenletrendszerből kapjuk:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}. \quad (17)$$

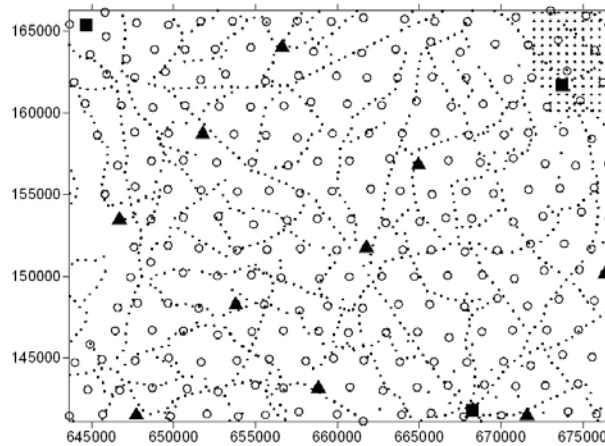
Az inverz probléma lineáris, megoldásával a sorfejtési együtthatók  $\mathbf{B}$  vektora meghatározható. A  $\mathbf{B}$  vektor elemeinek ismeretében a teljes Eötvös-tenzor (beleértve az Eötvös-ingával közvetlenül nem mérhető vertikális gradiens értékeket is), ezen kívül pedig a függővonal-elhajlás számításához szükséges  $W_x, W_y$  mennyiségek továbbá a nehézségi gyorsulás értékek is egzaktul számíthatók nemcsak a mérési pontokban, hanem a teljes mérési területen.

### 3 Kísérleti számítások

A módszer alkalmazhatóságának vizsgálatára az 1. ábrán látható Szabadszállás-Kiskörös környéki területen végeztünk kísérleti számításokat, ahol 248 Eötvös-inga és 1197 graviméteres mérés eredményei állnak rendelkezésre.

A teszt területen három asztrogeodéziai és további tíz asztrogravimetriai pont is található, ahol ismertek a GRS80 rendszerre vonatkozó  $\xi, \eta$  függővonal-elhajlás értékek. Az ábrán a pontok a graviméteres mérések, a körök az inga-mérések helyszínét a fekete négyzetek az asztrogeodéziai, a háromszögek pedig az asztrogravimetriai pontokat jelölik. A kereten az EOVS koordináták láthatók méterben.

A 2. és a 3. ábrán a  $W_\Delta$ , a 4. és az 5. ábrán a  $W_{xy}$  görbületi gradiensek, 6. és a 7. ábrán a  $W_{zx}$ , a 8. és a 9. ábrán pedig a  $W_{zy}$  horizontális gradiensek izovonalas térképe látható. A 2. 4. 6. és a 8. ábrán a 248 Eötvös-inga mérés alapján megszerkesztett kép, a 3. 5. 7. és a 9. ábrán pedig az inverziós eljárással előállított kép látható. Az ábrákon az izovonalak lépésköze 5 E. ( $1E = 1Eötvös \text{ egység} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ).



1. ábra. Graviméteres és Eötvös-inga mérési pontok a teszt területen

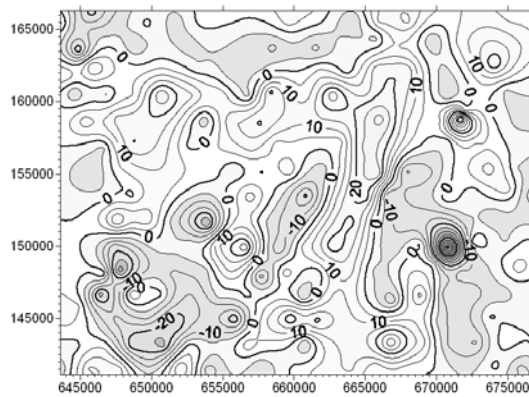
Az ábrákat úgy csoportosítottuk, hogy az Eötvös-ingával mért eredeti és az ellenőrzés céljából inverziós rekonstrukcióval előállított képek egymás mellett közvetlenül összehasonlíthatók legyenek.

A  $W_{\Delta}$ , a  $W_{xy}$ , a  $W_{zx}$  és a  $W_{zy}$  gradiensek 2. 4. 6. és 8. ábrán látható meglehetősen változatos képe azt vetítette előre, hogy esetünkben a potenciáltér sorfejtéses leírása csak viszonylag magas fokszámú polinomokkal lesz lehetséges.

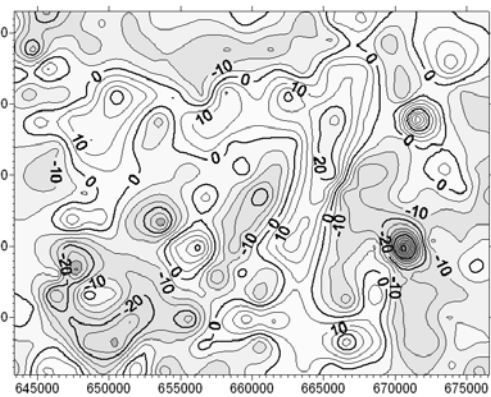
Az inverziós feladat megoldása során meghatároztuk mindazon sorfejtési együtthatókat, amelyek segítségével a teljes teszterületre előállítható mind a nehézségi erőtér potenciálfüggvénye, mind a potenciálfüggvény valamennyi első és második deriváltja. Összehasonlítva például a 2. és 3. illetve a 4. és 5. ábrákon az Eötvös-ingával mért, valamint az együttes inverzióval előállított  $W_{\Delta}$  és  $W_{xy}$  görbületes gradiensek képét, az egyezés igen jónak mondható, – de ugyanez a jó egyezés tapasztalható a  $W_{zx}$  és a  $W_{zy}$  horizontális gradiensek esetében is a 6. és 7. illetve a 8. és 9. ábrákon.

Tapasztalataink szerint a polinomok fokszámának meghatározásakor körültekintően kell eljárunk, mert a fokszám növelésével kezdetben lassan, majd egyre gyorsabban csökken a megoldandó normálegyenletek együtthatómátrixának kondicionáltsága, a fokszám csökkentésével viszont romlik a felbontóképesség. Vizsgálataink szerint a  $P=18-24$  általában jó kompromisszumnak látszik a felbontóképesség és a normálegyenletek kondicionáltsága vonatkozásában, – mi most  $P=19$  fokszámú hatványpolinomot alkalmaztunk.

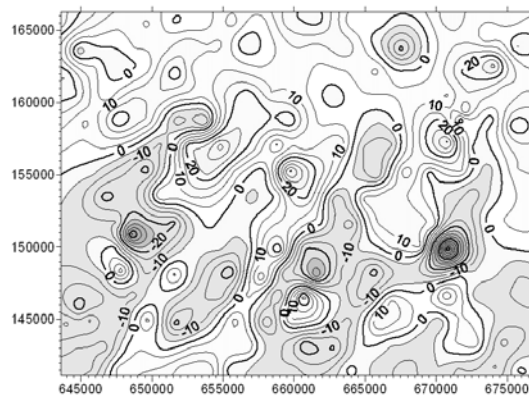
A sorfejtési együtthatók ismeretében lehetőség van a nehézségi erőtér potenciálfüggvényének valamint a potenciálfüggvény első deriváltjainak meghatározására is. A 10. ábrán egy additív állan-



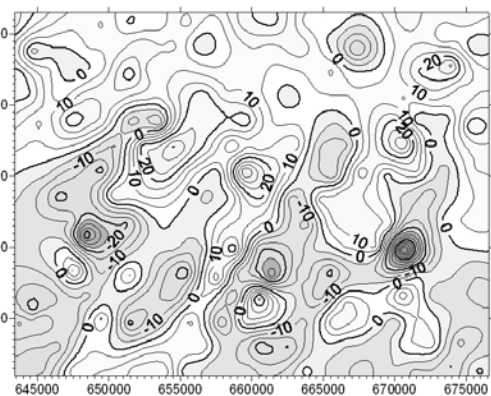
2. ábra. Eötvös-ingával mért  $W_{\Delta}$  területi eloszlása.



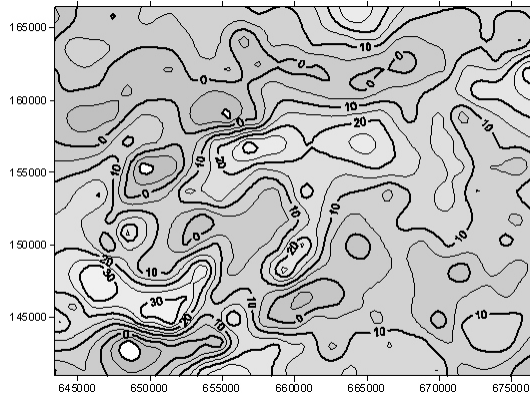
3. ábra. Az inverzióval előállított  $W_{\Delta}$  területi eloszlása.



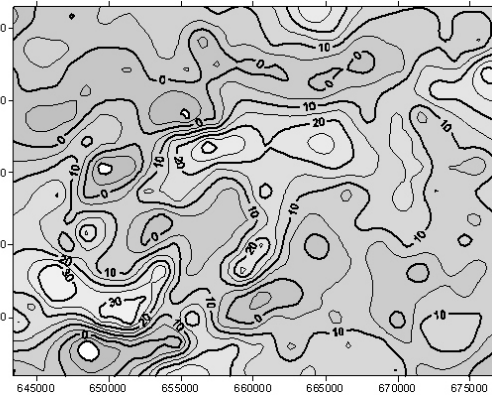
4. ábra. Eötvös-ingával mért  $W_{xy}$  területi eloszlása.



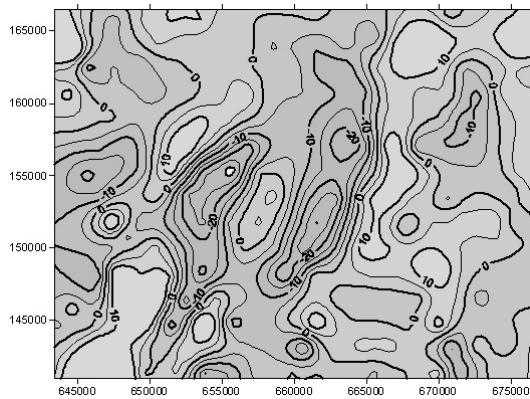
5. ábra. Az inverzióval előállított  $W_{xy}$  területi eloszlása.



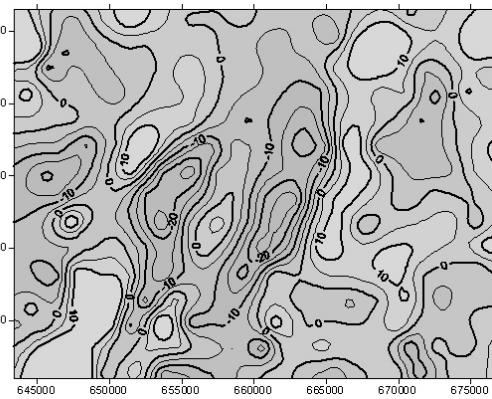
6. ábra. Eötvös-ingával mért  $W_{zx}$  területi eloszlása.



7. ábra. Az inverzióval előállított  $W_{zx}$  területi eloszlása.



8. ábra. Eötvös-ingával mért  $W_{zy}$  területi eloszlása.



9. ábra. Az inverzióval előállított  $W_{zy}$  területi eloszlása.

dó erejéig együttes inverzióval meghatározott potenciálmező látható. Az ábrán az izovonalak lépésköze  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

A geodézia számára igen fontos függővonal-elhajlások számításához a  $W_x$  és  $W_y$  mennyiségek ismerete szükséges, ugyanis a  $\xi$  és az  $\eta$  értékek a

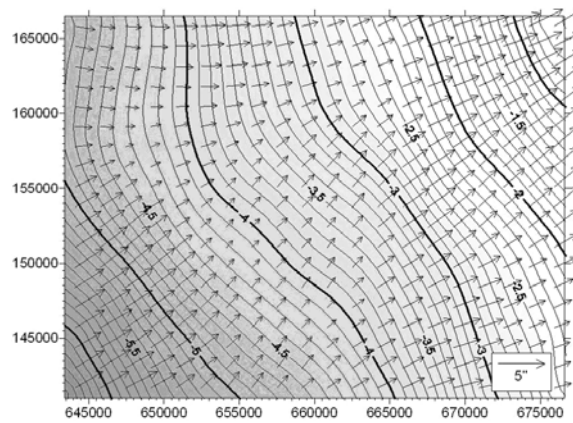
$$\xi = W_x / g \quad (17)$$

és

$$\eta = W_y / g \quad (18)$$

összefüggések alapján számíthatók. A 10. ábrán egyúttal a függővonal-elhajlások vektorait is bemutatjuk az együttes inverziós megoldásából, – ahol a vektorok hosszát a  $\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  összefüggés alapján számítottuk.

Végül, amint jeleztük, az inverziós eljárással lehetőség nyílik az Eötvös-ingával közvetlenül nem mérhető  $W_{zz}$  vertikális gradiensek meghatározására is. Az így meghatározott vertikális gradiensek ellenőrzésére eddig nem volt lehetőségünk, ebből a célból néhány ellenőrző pontban vertikális gradiens méréseket tervezünk.



10. ábra. Együttes inverzióval előállított potenciáltér (az izovonalak lépésköze  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ) és a függővonal-elhajlások vektorábrája

## 6 Összefoglalás

Az általunk korábban kidolgozott 2D eljárás továbbfejlesztésével megoldottuk a nehézségi erőtér 3 dimenziós potenciálfüggvényének inverziós előállítását. A bemutatott módszer a potenciálfüggvény nagyszámú Eötvös-inga és graviméteres mérés, valamint digitális terepmodell adatok és néhány függővonal-elhajlás adat együttes inverziójának felhasználásával történő meghatározására nyújt lehetőséget. Az így rekonstruált potenciálfüggvényből számos gyakorlati fontosságú „teret”, (pl. vertikális gradienseket, függővonal-elhajlásokat) származtathatunk le a vizsgálati terület bármely pontjában. Az eljárás előnye, hogy mindezt egy jelentősen túlhatározott inverz probléma megoldásával tehetjük.

**Köszönetnyilvánítás.** Kutatásaink a K60657 és a K76231 OTKA támogatásával folynak.

## Hivatkozások

- Dobróka M, Völgyesi L** (2005): A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciója Eötvös-inga adatok alapján. *Geomatikai Közlemények VIII*, 223-230.
- Dobróka M, Völgyesi L** (2008): Inversion reconstruction of gravity potential based on gravity gradients. *Mathematical Geosciences*, 40(3), 299-311.
- Haalek H** (1950): Die vollständige Berechnung örtlicher gravimetrischer Störefelder aus Drehwaagemessungen. *Veröffentlichungen des Geodätischen Institutes Potsdam*, Nr. 4, Potsdam.
- Tóth Gy, Völgyesi L, Csapó G** (2004): Determination of vertical gradients from torsion balance measurements. IAG International Symposium, Gravity, Geoid and Space Missions. Porto, Portugal August 30 - September 3, 2004.
- Tóth Gy, Völgyesi L, Csapó G** (2005): Determination of vertical gradients from torsion balance measurements. IAG Symposia Vol 129, Gravity, Geoid and Space Missions, C. Jekeli, L. Bastos, J. Fernandes (Eds.), Springer, 292-297.
- Tóth Gy** (2007): Vertikális gravitációs gradiens meghatározás Eötvös-inga mérések hálózatában. *Geomatikai Közlemények X*, 29-36.
- Völgyesi L** (1993) Interpolation of deflection of the vertical based on gravity gradients. *Periodica Polytechnica Civ.Eng.*, 37(2), 137-166.
- Völgyesi L** (1995) Test Interpolation of deflection of the vertical in Hungary based on gravity gradients. *Periodica Polytechnica Civ.Eng.*, 39(1), 37-75.
- Völgyesi L** (2001): Local geoid determinations based on gravity gradients. *Acta Geodaetica et Geophysica Hung.* 36(2), 153-162.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G** (2004): Determination of gravity anomalies from torsion balance measurements. Gravity, Geoid and Space Missions GGSM 2004. IAG International Symposium Porto, Portugal. Jekeli C, Bastos L, Fernandes J. (Eds.) Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York; Series: IAG Symposia, Vol. 129. pp. 292-297.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G, Szabó Z** (2005): Az Eötvös-ingamérések geodéziai célú hasznosításának helyzete Magyarországon. *Geodézia és Kartográfia*, 57(5), 3-12.
- Völgyesi L** (2005) Deflections of the vertical and geoid heights from gravity gradients. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 40(2), 147-159.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G** (2007): Determination of gravity field from horizontal gradients of gravity. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 42(1), 107-117.