

NEHÉZSÉGI GRADIENSEK LINEARITÁS-VIZSGÁLATA A MÁTYÁS-BARLANGBAN

Völgyesi Lajos^{*, **}, Ultmann Zita^{*}



Question of linearity of the gravity gradients in the Mátyás-cave – Linear changing between the adjoining network points is an important demand of different interpolation methods using the gravity gradients measured by torsion balance. To study the linearity torsion balance measurements were made at the surroundings of a gravity microbase point in the gravity laboratory of Lorand Eötvös Geophysical Institute in the Mátyás cave. Controlling the measurements gravity model computations were made at the same time. Our investigations demonstrate that the changing of gravity gradients is not even linear between neighbouring points having the distance only 30 cm in the case of huge gravity gradients in the Mátyás cave.

Keywords: gravity gradients, curvature data, linearity, Torsion balance

Az Eötvös-inga mérések alapján végzett különféle interpolációs számítások során fontos alapkövetelmény a nehézségi gradiensek és a görbületi értékek két pont közötti lineáris változása. Ennek vizsgálata céljából Eötvös-inga méréseket végeztünk a budapesti Mátyás-barlangban az ELGI gravitációs mikrobázisának pontjaiban. A mérésekkel párhuzamosan ellenőrző modellszámításokat is végeztünk. Vizsgálataink alapján megállapítható, hogy a mérési pontokban tapasztalható extrém magas gradiens értékek esetén még 30 cm távolságon belül sem tekinthető minden esetben lineárisnak a gradiensek változása.

Kulcsszavak: nehézségi gradiensek, görbületi értékek, linearitás, Eötvös-inga

1 A linearitás-vizsgálat szükségessége

Korábbi munkáink során már felmerült a gyanú, hogy az ingamérések rendelkezésünkre álló pontsűrűsége sok esetben nem elegendő, mivel a nagy gradiensű területeken a magas frekvenciás változások nagy amplitúdója miatt egészen rövid távolságon belül sem tekinthető lineárisnak a gradiensek változása.

Amennyiben Eötvös-ingával mért W_{Δ} és W_{xy} görbületi adatok felhasználásával szeretnénk függővonal-elhajlás különbségeket interpolációval számítani az α_{ik} azimutban lévő n irányban a P_i és a P_k pont között, akkor a

$$\int_{n_i}^{n_k} \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} dn \quad (1)$$

integrált kell kiszámítanunk, ahol

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha_{ik} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha_{ik} = \frac{1}{2} W_{\Delta} \sin 2\alpha_{ik} + W_{xy} \cos 2\alpha_{ik} \quad (2)$$

amelyben n_{ik} a P_i és a P_k pont távolsága egymástól, s az n -re merőleges koordináta irány, W_{Δ} és W_{xy} pedig az Eötvös-ingával mérhető görbületi értékek (Völgyesi, 2005).

Ha a P_i és a P_k pont elég közel fekszik egymáshoz úgy, hogy közöttük a W_{ns} második differenciáhányados megváltozása *lineárisnak* tekinthető, akkor az (1) integrál a

^{*} Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

^{**} MTA-BME Fizikai Geodézia és Geodinamikai Kutatócsoport

H-1111 Budapest, Műegyetem rkp.3. E-mail: volgyesi@eik.bme.hu, ultmann@gmail.com

$$\int_{n_i}^{n_k} \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} dn = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \right)_i + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \right)_k \right] n_{ik} \quad (3)$$

a trapéz integrálközelítő képlettel számítható. Ekkor a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevőknek a P_i és a P_k pont közötti $\Delta \xi_{ki}$ és $\Delta \eta_{ki}$ megváltozása az

$$\frac{1}{2} [(\Delta W_{ns})_i + (\Delta W_{ns})_k] n_{ik} = g (\Delta \xi_{ki} \sin \alpha_{ik} - \Delta \eta_{ki} \cos \alpha_{ik}) \quad (4)$$

összefüggéssel számítható, ahol a

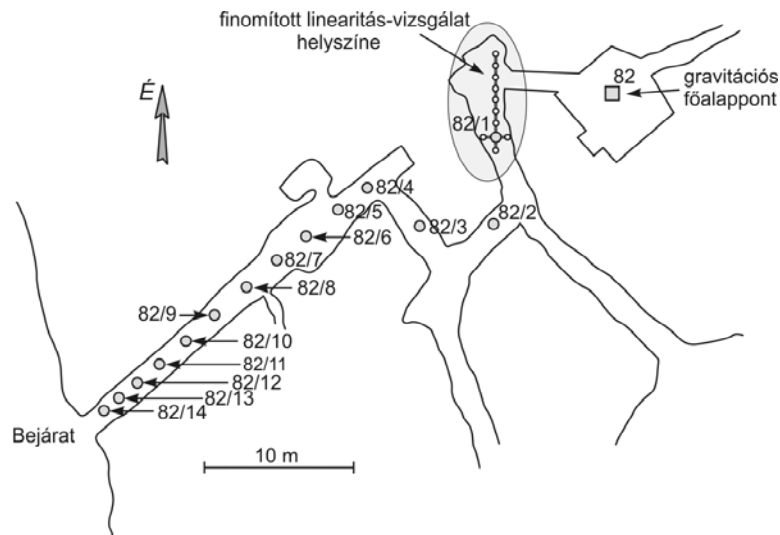
$$\Delta W_{ns} = \frac{1}{2} (W_{\Delta} - U_{\Delta}) \sin 2\alpha_{ik} + (W_{xy} - U_{xy}) \cos 2\alpha_{ik} , \quad (5)$$

amelyben az U_{Δ} és az U_{xy} az Eötvös-ingával mérhető W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek normálértékei (Völgyesi, 2005).

A fentiek szerint a számított függővonal-elhajlás értékek pontossága egyértelműen attól függ, hogy a két szomszédos Eötvös-inga mérési pont között mennyire lineáris a W_{Δ} és a W_{xy} görbületi gradiensek megváltozása.

Teljesen hasonló esettel állunk szemben, ha a W_{zx} és a W_{zy} nehézségi gradiensek felhasználásával g vagy Δg értékeket számítunk interpolációval, ugyanis a (3)-hoz hasonlóan trapéz integrálközelítő módszerrel kell számolnunk (Völgyesi-Tóth-Csapó, 2005, 2007).

Összefoglalva megállapíthatjuk tehát, hogy az Eötvös-inga mérések alapján végzett függővonal-elhajlás interpoláció, a geoid finomszerkezetének meghatározása, a nehézségi gradiensek felhasználásával g vagy Δg értékek számítása, és a vertikális gradiensek interpolációja során a numerikus integrálás számításakor, valamennyi esetben fontos alapkövetelmény a W_{zx} , W_{zy} nehézségi gradiensek és a W_{Δ} , W_{xy} görbületi értékek két pont közötti lineáris változása. Ezért az interpolációhoz az Eötvös-inga mérések olyan pontsűrűségére van szükségünk, amely biztosítja ezt a fontos feltételt – vagyis az interpolációs számítások során az elérhető pontosság alapvetően ennek a függvénye.



1. ábra. A gravitációs mikrobázis pontjai és a linearitás-vizsgálat helyszíne a Mátyás-barlangban

2 A mérések helyszíne

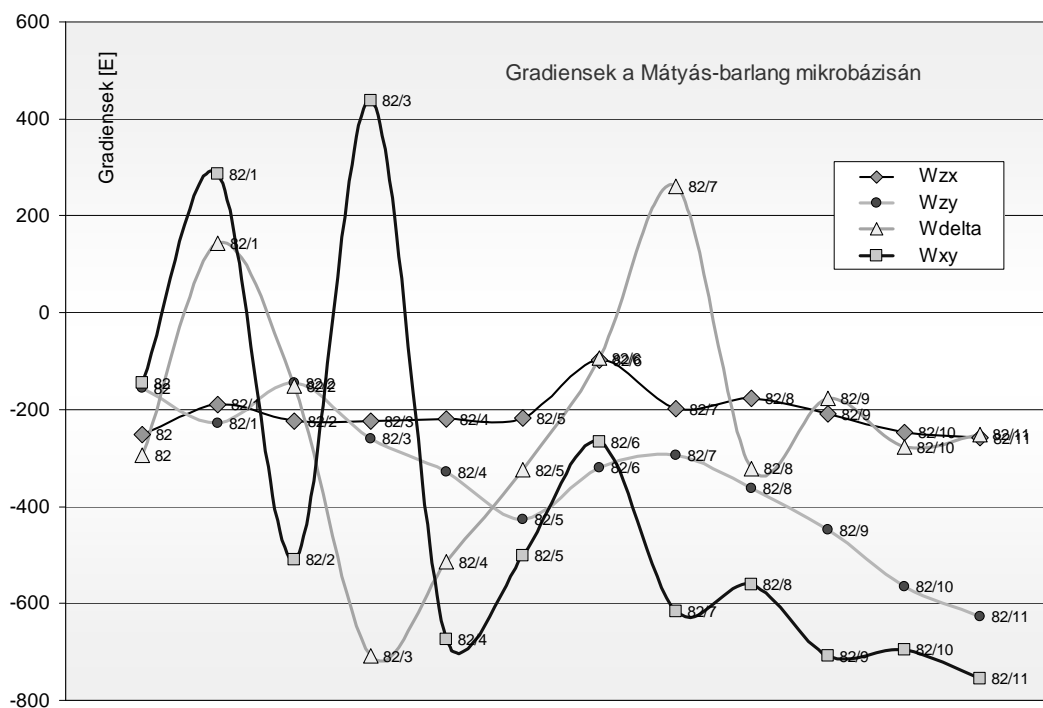
A linearitás-vizsgálatokat a budapesti Mátyás-barlangban az ELGI gravitációs mikrobázisának az 1. ábrán látható pontjain végeztük. A mérési helyszín vázlatán látható, hogy a mikrobázis 82/1-től 82/14-ig számozott pontjai egymáshoz igen közel, alig néhány méteres távolságban helyezkednek el. A mikrobázis 82/4-től 82/14-ig számozott pontjai a barlangba vezető egyenes bejárati folyosón találhatóak. A folyosó a 82 jelű fólalappontot tartalmazó nagyteremhez képest jóval alacsonyabb és keskenyebb. A 82/4-es ponttól kifelé a 82/14-es pontig a barlang bejárata felé haladva jelentkezik egyre inkább a külső meredek sziklafal gravitációs hatása. Az ismert egyre nagyobb gradiensértékek miatt (Völgyesi és mások, 2009) a mérési pontok a bejárathoz közeledve egyre sűrűsödnek.

Méréseinket a 82/1 jelű pont közvetlen környezetében tovább finomítottuk, a pont körül észak-déli illetve kelet-nyugati irányban a mérési pontokat 30 cm lépésközűre sűrítettük. Így a méréseket É-D irányban +210 és -30 cm között 9 pontban, K-Ny irányban a szűk barlangfolyosó miatt -30 és +30 cm között 3 pontban végeztük.

A mérési helyszín abból a szempontból is ideálisnak tekinthető, hogy a barlangban gyakorlatilag nem változik a hőmérséklet, ezért az ingaméréseket leginkább zavaró hőmérséklet-változások nem zavarják a vizsgálatokat.

3 Mérési eredmények

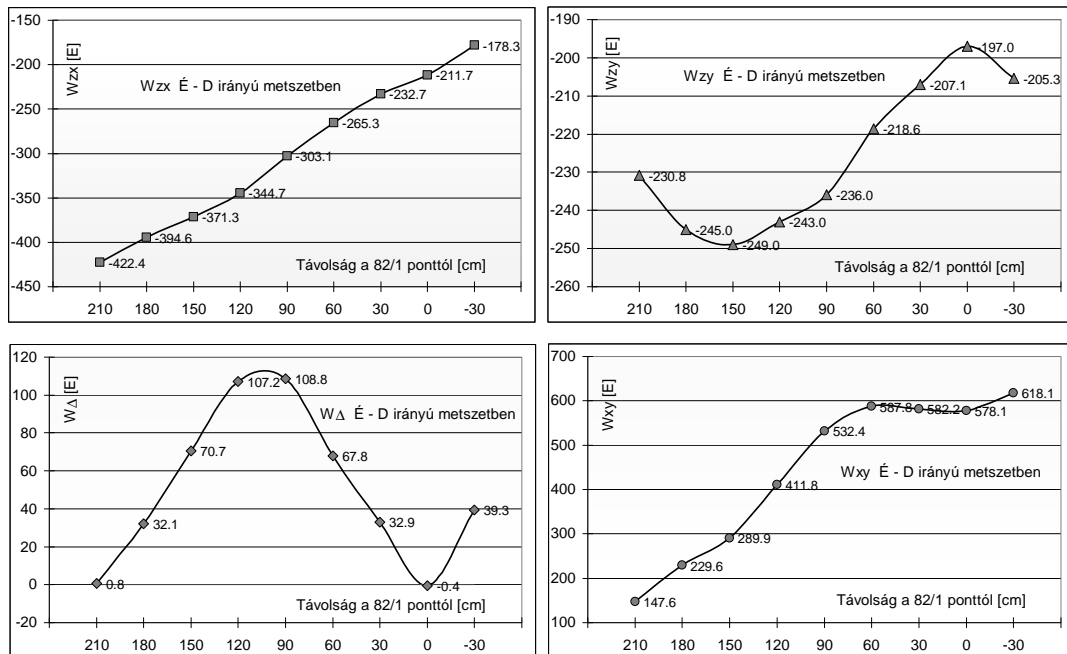
A BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék AUTERBAL ingájának 2008-as felújítását követően a rendszeres napi méréseket 2008. július második harmadában kezdtük a Mátyás-barlangban, és szeptember elejére fejeztük be (Völgyesi et al, 2009). Ez idő alatt több összehasonlító mérést végeztünk a 82 jelű gravitációs fólalapponton, majd végigmértünk a gravitációs mikrobázis 82/1 pontjától a 82/11 pontjáig. A 82/12, 82/13 és a 82/14 pontokon már nem tudtunk mérni, mivel még az AUTERBAL inga mérési tartománya sem volt elegendő a hatalmas gradiensek meghatározásához.



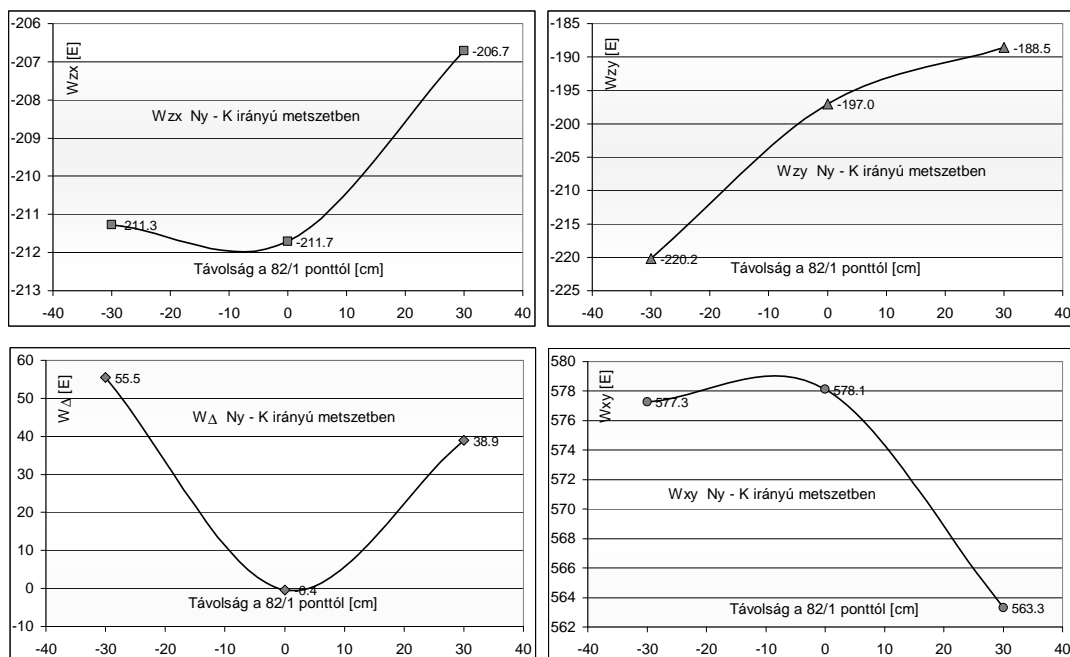
2. ábra. A gradiensek változása a Mátyás-barlang gravitációs mikrobázisának pontjaiban

A méréseink alapján meghatározott gradiens értékek változását a 2. ábrán szemléltetjük. A 82/2 és a 82/3 pont elhagyásával gyakorlatilag az ÉK-DNy irányú metszetben láthatjuk a változásokat. Az ábrán azonban mégis feltüntettük a 82/2 és a 82/3 pontok értékeit is, mivel pl az (1) – (5) összefüggések alkalmazása során a függővonal-elhajlás interpoláció a szomszédos mérési pontok között történik az őket összekötő vonal irányától függetlenül, tehát nem csupán egyetlen szelvény mentén, hanem a teljes területre érdekel minket a gradiens linearitása. Szembetűnő, hogy alig néhány méteres távolságokon belül igen nagy a gradiens értékek változása, és különösen igaz ez a W_{Δ} és a W_{xy} görbületi adatok esetére. Minden további bonyolultabb matematikai elemzés nélkül ránézésre is megállapítható, hogy ilyen nagyságrendű változások esetén még néhány méteres távolságon belül sem tekinthető lineárisnak az Eötvös-ingával mérhető mennyiségek változása.

Mivel szeretnénk volna megtudni, hogy mi az a távolság, amely esetén még éppen lineárisnak tekinthetők a változások, méréseinket a 82/1 jelű pont közvetlen környezetében tovább finomítottuk, a pont körül É-D illetve K-Ny irányban a mérési pontokat 30 cm lépésközben besűrítettük (Csepregi, 2010). Így a méréseket É-D irányban +210 és -30 cm között 9 pontban, K-Ny irányban a szűk barlangfolyosó miatt +30 és -30 cm között 3 pontban végeztük. Az egyes gradiens és görbületi adatok változása a 3. ábrán É-D, a 4. ábrán pedig K-Ny irányban követhető nyomon. A 3. és a 4. ábra tanúsága szerint a W_{zx} és a W_{zy} horizontális gradiensek változása 30 cm-en belül a legtöbb helyen többé-kevésbé lineárisnak tekinthető (bár ez alól a W_{zy} kivétel a 82/1 pont környezetében és ettől a ponttól É-i irányban kb. 1.5 m-es távolságban). Ugyanakkor a W_{Δ} és a W_{xy} görbületi adatok megváltozása még 30 cm távolságon belül sem tekinthető lineárisnak, ráadásul éppen ez a két mennyiség szükséges a függővonal-elhajlás interpolációhoz és a geoid finomszerkezetének meghatározásához. Különösen a W_{Δ} változása figyelmeztet a 82/1 pont környezetében arra, hogy olyan kivételesen nagy gradiensű helyen, mint pl. a Mátyás-barlang, még néhány dm-en belül sem szabad bízunk a görbületi adatok linearitásában.



3. ábra. A gradiensek változása a 82/1 pont környezetében É – D irányban 30 cm távolságoként

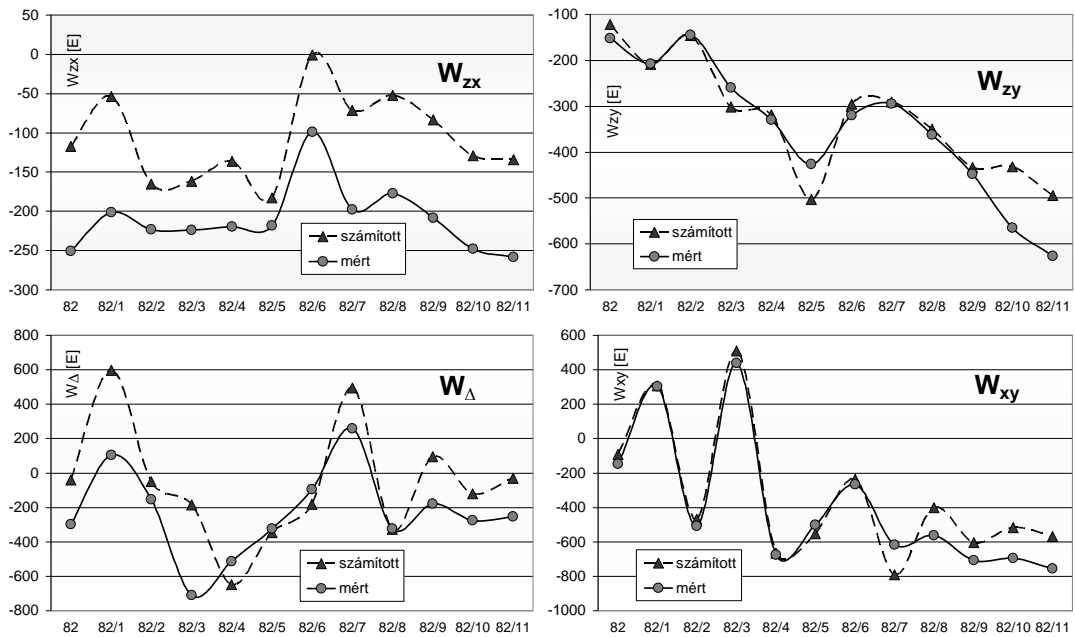


4. ábra. A gradiensek változása a 82/1 pont környezetében 30 cm távolságra K – Ny irányban

4 Modellszámítások eredményei

Az Eötvös-inga mérésekkel párhuzamosan modellszámításokat is végeztünk. A tömegmodell kialakítása külső, és a barlangon belüli felmérés eredményei alapján történt. A külső terepmodell előállításához rendelkezésre állt egy körülbelül 30 évvel ezelőtti a tanszékünk által készített 1:500 méretarányú szintvonalas térkép, amelyen a kérdéses terület síkrajza mellett a magasságértékek is szerepelnek. A modell létrehozásához kiegészítésként az EOTR térképszelvényeket is felhasználtuk. A külső felületmodell előállításához, a hagyományos geodéziai mérések mellett –, a barlang bejárati oldalán található bonyolult formájú és nehezen megközelíthető sziklafal miatt –, fotogrammetriai módszer alkalmazására is szükség volt. Megfelelő fényképfelvételek alapján, a *Photomodeler* szoftver alkalmazásával készítettük el a külső sziklafal felületmodelljét (Ultmann, 2007, 2009a, 2009b). A barlang belsejének felmérését Égető Cs. végezte, amely alapján már viszonylag egyszerűen előállítható volt az üregmodell (Tóth - Égető, 2011). A gravitációs hatás számításához meg kellett határozni a modelltest sűrűségét is. Mivel a vizsgált területen túlnyomó részben mészkő található, ezért a számításainkban átlagos 2500 kg/m^3 értékű mészkő sűrűséget feltételeztünk.

A modellszámítást a *PolyGrav* szoftverrel (<http://www.geod.bme.hu/gtoth/PolyGrav.html> 2011-01-07) hajtottuk végre, mely tetszőleges homogén sűrűség-eloszlású poliéder test gravitációs hatásának számítására a Holstein (2003) által kidolgozott összefüggését használja (Tóth - Égető, 2011). A számítási eredményeket az 5. ábrán hasonlíthatjuk össze a mérésekkel. A görbék alakját tekintve megnyugtató hasonlóság látható a mért és a számított gradiensek között. Ugyanakkor a számértékekben helyenként komolyabb eltérések is tapasztalhatók. Ennek több oka is lehet: egyrészt a valódi sűrűségeloszlást nem ismerjük, ezért a számításainkban a valóságostól eltérően homogén sűrűségeloszlást feltételeztünk, másrészt a terület jellegéből adódóan további, a számunkra egyelőre ismeretlen kisebb-nagyobb barlang-üreges is lehetnek a mérések környezetében. Ebből a szempontból érdekes lenne az eltérések okát elemezni, jelenleg viszont nem ez volt a fő célunk. Az minden esetre megállapítható, hogy a linearitás vizsgálatok céljára önmagában is megfelelően alkalmazható az általunk kipróbált számítási módszer, azaz nem túl bonyolult sűrűség-gradiensű területen, csupán a topográfia ismeretében, számítással is információt kaphatunk a nehézségi gradiensek változásának jellegére.



5. ábra. A mért és a számított gradiensek és görbületi adatok összehasonlítása a mikrobázis pontjain

5 Összefoglalás

Méréseink alapján megállapítható, hogy a vizsgált pontokban tapasztalható extrém magas gradiensek értékek esetén, még 30 cm távolságon belül sem tekinthető minden esetben lineárisnak két pont között a gradiensek és a görbületi mennyiségek változása. Összevetve a görbületi adatok és a horizontális gradiensek változását megállapítható, hogy a görbületi adatok változása markánsabb és kevésbé tekinthető lineárisnak. Tömegmodell számítással nem túl bonyolult sűrűség-gradiensű területen, csupán a topográfia ismeretében, önmagában is információt szerezhetünk a nehézségi gradiensek változásának jellegéről.

Köszönetnyilvánítás. Kutatásaink a 76231 sz. OTKA támogatásával folynak. Ezúton is köszönjük a Mátyás-barlangban végzett méréseinkhez az ELGI, és kiemelten Csapó Géza segítségét.

Hivatkozások

- Csepregi A Z (2010): A nehézségi erőter gradienseinek vizsgálata. Diplomaterv. BME Ált. és Felsőgeodézia Tsz. Budapest
- Holstein H (2003): Gravimagnetic anomaly formulas for polyhedra of spatially linear media. *Geophysics*, 68, 157-167.
- Tóth Gy, Égető Cs (2011): A Mátyás-hegyi Gravitációs és Geodinamikai Observatórium átfogó gravitációs modellezése. *Geomatikai Közlemények*, XIII.
- Ulmann Z (2007): Gravitációs tömeghatás számítása a Mátyás-hegyi barlang környezetében. TDK dolgozat, BME Építőmérnöki Kar.
- Ulmann Z (2009a): Gravitációs tömeghatás számítása a Mátyás-hegyi barlang környezetében. OTDK dolgozat, Miskolc, Műszaki Tud. Szekció.
- Ulmann Z (2009b): A nehézségi erőter gradienseinek vizsgálata, Diplomaterv. BME Ált. és Felsőgeodézia Tanszék, Budapest.
- Völgyesi L. (2005) Deflections of the vertical and geoid heights from gravity gradients. *Acta Geod. Geoph. Hung.* 40(2), 147-159.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G (2005): Determination of gravity anomalies from torsion balance measurements. In: Jekeli C Bastos L Fernandes J (szerk.) *Geoid and Space Missions GGSM 2004*. 368 p. Berlin ; Heidelberg ; New York: Springer-Verlag, 2005. 292-297. (International Association of Geodesy Symposia; 129.) (ISBN:3-540-26930-4)
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G (2007): Determination of gravity field from horizontal gradients of gravity. *Acta Geod. Geoph. Hung.* 42(1), 107-117.
- Völgyesi L, Égető Cs, Laky S, Tóth Gy, Ulmann Z (2009): Eötvös-inga felújítása és tesztmérések a budapesti Mátyás-hegyi-barlangban. *Geomatikai Közlemények*, XII, 71-82.