

AZ EÖTVÖS-INGA MÉRÉSI IDEJÉNEK CSÖKKENTÉSI LEHETŐSÉGE

Völgyesi Lajos^{***}, Laky Sándor^{**}, Tóth Gyula^{***}



Possibility for reducing the measurement time of the Eötvös torsion balance – The main problem of torsion balance measurements is the long damping time, however it is possible to significantly reduce it by modern technology. The damping curve can be precisely determined by CCD sensors as well as computerized data collection and evaluation. The first part of this curve makes it possible at least theoretically to estimate the final position of the arm at rest. Two methods are presented here to solve the problem – a finite element solution of a fluid dynamics model based on Navier-Stokes equations and a differential evolution algorithm.

Keywords: Eötvös torsion balance, damping time, CCD sensor, Navier-Stokes equations, CFD, finite elements, differential evolution algorithm

Az Eötvös-inga mérések mindenkor legnagyobb problémája a hosszú csillapodási idő, azonban a mai modern technika alkalmazásával lehetőség kínálkozik az észlelési idő jelentős csökkentésére. A leolvasásra CCD-érzékelőket alkalmazva számítógépes regisztrálás és kiértékelés esetén igen jó felbontással meghatározható a csillapodási görbe, amelynek kezdeti szakaszából elvileg előre meghatározható az inga nyugalmi helyzete. A feladat megoldására két különböző lehetőséget mutatunk be – a Navier-Stokes egyenletek végesesemleges megoldásán alapuló áramlási modell felhasználását, és a differenciális evolúciós algoritmus alkalmazását.

Kulcsszavak: Eötvös-inga, csillapodási idő, CCD-érzékelő, Navier-Stokes egyenletek, numerikus áramlástan, végesesemek, differenciális evolúciós algoritmus

1 Bevezetés

A gravitációs kutatásokban az 1950-es évektől kezdve az Eötvös-inga mérések nehézsége, időigényessége miatt egyre inkább a graviméteres mérések vették át a vezető szerepet. Mivel az új gravimétereket a nyugati országok stratégiai jelentőségű műszereknek minősítették, ezért a volt szocialista országok nem juthattak hozzá ezekhez a műszerekhez. Emiatt az ötvenes évektől egészen 1967-ig az Eötvös-inga méréseknek egy újabb aranykora következett be hazánkban. Napjainkban elsősorban a geodéziai hasznosítás területén újabb igény jelentkezett az Eötvös-inga mérésekre (Völgyesi et al. 2009a, 2009b). A modern technikai eszközök birtokában most viszont lehetőségünk nyílt arra, hogy a hosszú mérési időt (azimutonként 40 perc) lerövidítsük és a mérések feldolgozását is automatizáljuk. A jelen tanulmányban éppen ezért az a célunk, hogy megvizsgáljuk az inga mozgásának fizikai hátterét, különös tekintettel a mérések feldolgozásával kapcsolatos új igényekre, a mérési idő lerövidítésére. Eközben természetesen mindvégig szem előtt tartjuk azt a szempontot, hogy a mérési idő hosszának csökkentése ne menjen az ingával elérhető pontosság rovására.

2 Az ingák csillapodásának tanulmányozására végzett mérések

Az Eötvös-inga mérések és különböző vizsgálatok céljára laboratóriumot alakítottunk ki a BME "R" épületének pincéjében. Meghatároztuk a mérési pont koordinátáit és a pontos északi irányt (Kovács és Nagy 2010), valamint különböző környezeti (pl. hőmérséklet-változás) vizsgálatokat végeztünk. A mérési helyszín abból a szempontból kedvezőnek tekinthető, hogy a mérések során gyakorlatilag nem változott a hőmérséklet, ezért az ingaméréseket leginkább zavaró hőmérséklet-változásokkal nem kellett foglalkoznunk.

^{*} Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

^{**} MTA-BME Fizikai Geodézia és Geodinamikai Kutatócsoport

H-1111 Budapest, Műegyetem rkp.3.

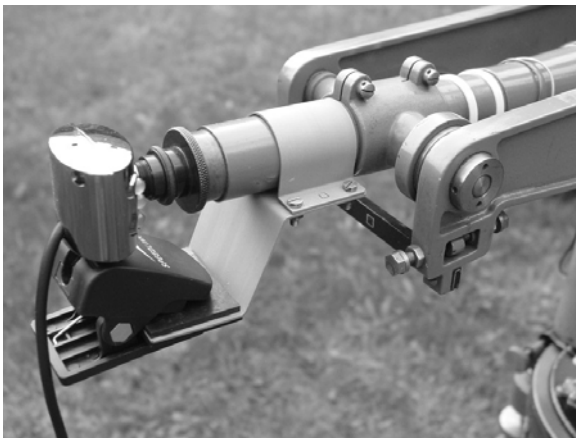
E-mail: volgyesi@eik.bme.hu, gtoth@sci.fgt.bme.hu, laky.sandor@freemail.hu

A BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék AUTERBAL-ingájának 2008. évi felújítását követően fontos fejlesztéseket hajtottunk végre. Az automatikus leolvasás megvalósítása céljából az 1. ábrán bemutatott formában CCD-érzékelős kamerákat szereltünk fel a leolvasó karokra, (egy így készített felvétel a 2. ábrán látható) a skálák megvilágítására pedig erős fényű LED-eket (fényemittáló diódákat) erősítettünk a leolvasó távcsövek alá. A kamerák vezérlését, a képek rögzítését számítógéppel oldottuk meg, a szükséges szoftvereket Linux operációs rendszer alatt fejlesztettük. Mivel a kamerák alkalmazásával lehetőség nyílt hosszú időn keresztül másodpercenként akár több leolvasást is végezni, ezzel új távlatok nyíltak eddig ismeretlen jelenségek megfigyelésére. Lehetővé vált például a lengések csillapodásának minden eddiginél pontosabb és részletesebb megfigyelése.

Az inga csillapodásának tanulmányozása céljából valamennyi azimutban több 40-50 perces felvételt készítettünk másodpercenként négy leolvasással. A csillapodási görbe finomszerkezetének tanulmányozása céljából másodpercenként 12, azaz közel 0.08 másodpercenkénti leolvasással, az esetleges hosszabb periódusú mozgások regisztrálására pedig két 24 órás 10 másodpercenkénti leolvasással rögzítettük az ingák mozgását.

A felvételek kiértékelését szintén számítógéppel végeztük egy saját fejlesztésű, Octave nyelven készült programcsomaggal. A skála elmozdulását a képek közötti keresztkorreláció számításával határoztuk meg, a képek Scharr-gradiensének (tehát nem közvetlenül a szürkeértékek) felhasználásával (ez javít némileg a kontrasztviszonyokon, segít kiküszöbölni a vignettálásból és a megvilágítási eltérésekből származó hibákat, stb) (Scharr, 2000).

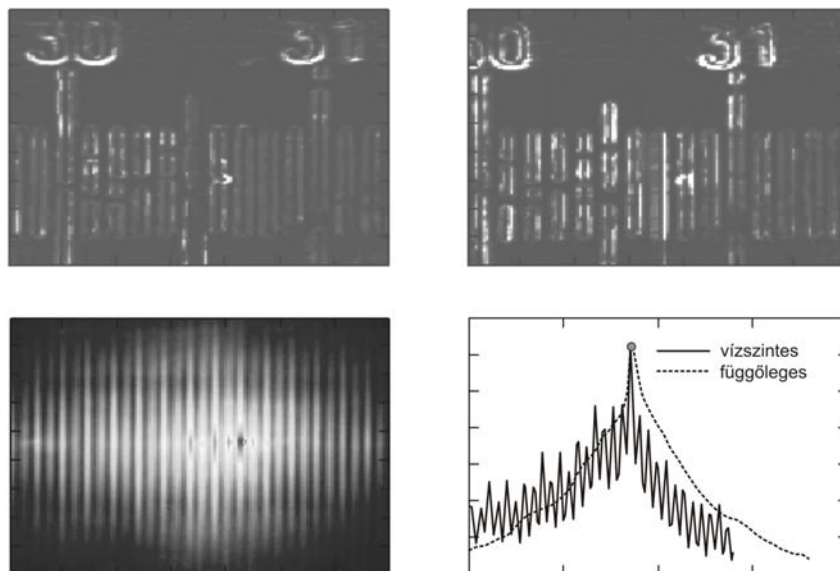
A kiértékelés során minden képnek vizsgáltuk az eltolódását az azt megelőző négy képhez képest a skálával párhuzamos irányú tengely mentén való eltolással számított 2D keresztkorrelációval, majd a megelőző négy képen a leolvasás értékéből és az imént meghatározott eltolódásokból a kiértékelés alatt álló képkockára négy leolvasás-értéket számítottunk. A végleges leolvasást (durvahibaszűrés után) a négy érték számtani közepe adta. A kiértékelés előtt a képek méretét Lánczos-interpolációval (Duchon, 1979) kétszeresre nagyítottuk – elvileg ez is segíti a „pixel alatti pontosság” elérését. Sajnos a skála elmozdulása nem csak vízszintes, hanem sok esetben függőleges irányban is számottevő, így nem lehetséges mindig egy tengely menti 2D keresztkorrelációt alkalmazni a képek közötti elmozdulás kiértékelésére, hanem mindkét irányú eltolásra is szükség lehet. Ekkor viszont sokkal lassabb a kiértékelés, ezért ebben az esetben nem mindig végeztünk 4 képes átlagolást. A 3. ábrán a két tengely mentén való eltolással számított 2D keresztkorreláció segítségével történő kiértékelésre láthatunk példát. A felső sorban a bal oldalon a megelőző képkocka, jobb oldalon a kiértékelés alatt álló képkocka Scharr-gradiense látható. Az alsó sorban a bal oldalon a két tengely mentén történő eltolással számított 2D keresztkorrelációs függvény látható, a jobb oldalon pedig ezen függvény maximumhelyén átmenő metszetei a két tengely irányában. Érdekes megfigyelni a keresztkorrelációs függvény jellegzetesen sávosszerű szerkezetét, amit az ismétlődő skálaosztások okoznak.



1. ábra. CCD kamera alkalmazása az automatikus leolvasáshoz



2. ábra. Leolvasás a CCD kamerával

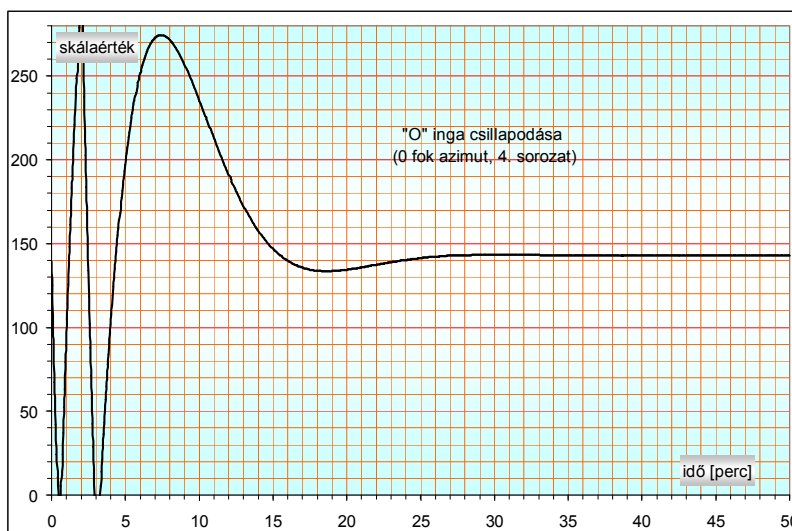


3. ábra. A kiértékelő program egy képernyőképe: a felső sorban bal oldalon a megelőző képkocka, jobb oldalon a kiértékelés alatt álló képkocka Schar-gradiense-, alul a kettő keresztkorrelációs képe és a max. keresztkorrelációs szelvény látható.

Mivel a leolvasóberendezésben az indexszál mozdulatlan, és e mögött látjuk a skála képét elmozdulni, a két kép közötti leolvasás-megváltozás könnyebben meghatározható, ha az indexszálat a képről „kimontírozzuk”. A további feldolgozáshoz (pl. digitális képek alapján abszolút leolvasások vizuális megtétele) az indexszál bármikor visszahelyezhető a képekre, mivel annak helyzete a kép koordináta-rendszerében adott.

A 24 órás és a megnövelt mintavételezési gyakoriságú mérések feldolgozásához egy teljesen más elven – a skála osztásainak követésén – alapuló feldolgozóprogramot is kifejlesztettünk. Sajnos azonban a normál csillapodási görbék igen meredek kezdeti periódusa, valamint a skála időnként igen jelentős függőleges irányú „rezgése” nem mindig teszi lehetővé a keresztkorrelációs módszer kiváltását.

A fenti módszerrel előállított idősorokból rendelkezésünkre álltak az igen részletes csillapodási görbék, amelyek közül egy jellegzetes esetet mutatunk be a 4. ábrán.



4. ábra. Jellegzetes csillapodási görbe

3 Az Eötvös-inga 7 szabadsági fokú fizikai modellje

Az általunk ismert szakirodalom (Selényi, 1953) megelégszik az Eötvös-inga egy szabadsági fokú, csak a torziós lengéseket számításba vevő fizikai modelljével. Azonban a CCD-érzékelővel felszerelt inga méréseinek értelmezéséhez és kiértékeléséhez szükségünk van az inga kellően részletes mechanikai modelljének kialakítására. Ehhez a mechanika Lagrange-egyenleteit használtuk fel (Landau és Lifsic 1974).

Minden mechanikai rendszert egy adott $L(q, \dot{q}, t)$ függvény, a rendszer (általános esetben a t időtől függő) q általános koordinátákkal és a \dot{q} általános sebességekkel felírt Lagrange-függvénye jellemez, és az s szabadsági fokú rendszer mozgása a következő ún. Lagrange-féle differenciál-egyenleteknek tesz eleget

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1)$$

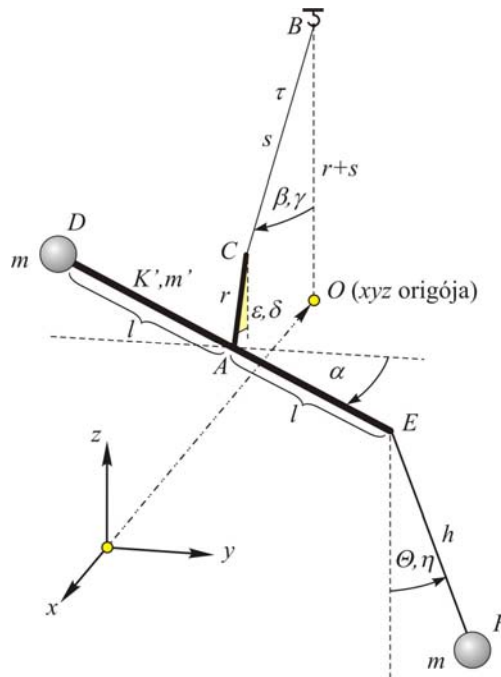
ahol $L = T(q, \dot{q}) - V(q)$ a kinetikus és potenciális energia különbsége.

Ha a rendszer konzervatív (nincsenek disszipatív erők) és standard (holonom, valamint a kényszererők munkája zérus), akkor a mechanikai rendszer mozgása teljesen leírható ezekkel az egyenletekkel. Az ingakar mozgásának vizsgálatához ez a modell megfelelő, mivel első közelítésben eltekinthetünk a disszipatív erőktől, továbbá a torziós lengések modellezését és vizsgálatát, ahol a disszipatív erők figyelembe vétele lényeges, külön fogjuk elvégezni.

Az Eötvös-inga Lagrange-egyenleteinek felírásához tekintsük az 5. ábrát! Az ábra szerint az inga három testre bontható (ezek az m' tömegű ingakar és a két m nagyságú tömeg), és összesen 7 szabadsági fokkal rendelkezik, mivel a következő 7 általános koordináta jellemzi a rendszer egy adott konfigurációját (a konfigurációs tér tehát 7 dimenziós):

$$q = (\alpha, \delta; \beta, \gamma; \theta, \eta; \varepsilon)$$

Az ábrán látható B pont a τ csavarási állandójú és s hosszúságú torziós szál felső befogási pontja.



5. ábra. Az Eötvös-inga mechanikai modellje

A torziós szál alul a C pontban csatlakozik az m' tömegű és K' tehetetlenségi nyomatékú merevnek tekintett $DE + AC$ inga lengőkarhoz. A felső m ingatömeg tömegközéppontja a D pontban, a kar középpontjától ℓ távolságra, az alsó m ingatömeg tömegközéppontja a súlytalan, h hosszúságú fonálon lelógatva az F pontban helyezkedik el.

Az általános q koordináták értelmezéséhez és az inga pontjai helyzetének jellemzéséhez vezetünk be az ábrán látható xyz jobbsodrású térbeli derékszögű koordinátarendszert. Ennek O origója legyen a B pont függőlegesében, attól $r + s$ távolságra, ahol r az A és C pontok távolsága. A rendszerünk x tengelye legyen a nyugalmi helyzetű inga rúdja merőleges, az y tengelye pedig mutasson erre merőlegesen a lelógatott m tömeg irányába. A BC egyenes helyzetét a z tengelyhez képest x és y irányban két szög, β és γ adja meg; a CA egyenes helyzetét pedig a z tengelyhez képest x és y irányban ε és δ . Az inga rúdjának, az AE egyenesnek a helyzetét az y tengelyhez képest x és z irányban az α és ugyancsak a δ szögekkel lehet jellemezni. Végül pedig az EF egyenesnek x és y irányban a z tengellyel bezárt szögeit θ és η adják.

A kinetikus és potenciális energia függvényének előállításához fel kell írni a fenti xyz térbeli derékszögű koordinátarendszerben a két ingatömeg (x_D, y_D, z_D) , (x_F, y_F, z_F) helyzetvektorait, valamint az ingakar P tömegközéppontja (x_P, y_P, z_P) helyzetvektorát. Ezen kívül a (v_{Dx}, v_{Dy}, v_{Dz}) , (v_{Fx}, v_{Fy}, v_{Fz}) , (v_{Px}, v_{Py}, v_{Pz}) sebességvektor összetevőkre is szükség van. Az inga lengőrendszerének V potenciális energiája egyrészt a három test együttes helyzeti energiájából, másrészt a torziós szál csavarásából származó potenciális energiából adódik. Ha a nyugalmi helyzet potenciális energiája zérus, és g a P pontbeli nehézségi gyorsulás, akkor

$$V = \frac{1}{2} \tau \alpha^2 + mgz_D + mg(z_F + h) + m'gz_P. \quad (2)$$

A teljes T kinetikus energia a mozgási és forgási energiák összege, amely a testek sebességeivel és a forgástengelyre vonatkozó szögsebességeikkel felírható. Az inga karjának a tömegközéppontján átmenő z , valamint x , y tengelyekkel párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai legyenek rendre K' , I_x' , I_y' . Így a rendszer teljes kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2} K' \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_x' \dot{\delta}^2 + \frac{1}{2} I_y' \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} mv_D^2 + \frac{1}{2} mv_F^2 + \frac{1}{2} m'v_P^2, \quad (3)$$

ahol $v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2 + v_{Dz}^2}$, $v_F = \sqrt{v_{Fx}^2 + v_{Fy}^2 + v_{Fz}^2}$, $v_P = \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2 + v_{Pz}^2}$, és a változó fölé tett pont az idő szerinti deriválást jelöli.

A (2) és a (3) kifejezéseket beírva az (1) egyenletbe megkapjuk az Eötvös-inga mechanikai modelljéhez tartozó Lagrange-egyenleteket. Ezekből a mechanikai rendszer sajátfrekvenciáinak és rezgési móduszainak meghatározása a kis amplitúdójú rezgést végző rendszer Lagrange-függvénye segítségével megoldható. A részletes levezetést mellőzve, a kapott egyenletekből kitűnik, hogy nincs csatolás a $\mathbf{q}_1 = [\alpha, \beta, \varepsilon, \theta]^T$ és a $\mathbf{q}_2 = [\gamma, \delta, \eta]^T$ vektorváltozók között, amelyek külön-külön a rendszer mozgásának transzverzális (rúdra merőleges) és longitudinális (a rúd irányába eső) összetevőit jellemzik.

Landau és Lifsic (1974) módszerét követve és a részletektől ismét eltekintve, a rendszer sajátrezgéseinek ω körfrekvenciáját úgy találhatjuk meg, hogy megoldjuk az alábbi általánosított sajátérték-problémákat (az A sajátvektor az egyes koordináták szerinti rezgések amplitúdóit, vagyis a rezgési móduszképet adja meg):

$$(\omega^2 \mathbf{M}_i - \mathbf{K}_i) \mathbf{A}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

A (4) egyenletet \mathbf{K}_i^{-1} -gyel szorozva és bevezetve a $\mathbf{B}_i = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{M}_i$ mátrixot, végeredményben a $\gamma = 1/\omega^2$ sajátértékekkel vett két szokásos sajátérték-problémát kell megoldanunk:

$$\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i = \gamma \mathbf{A}_i, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

A numerikus megoldás érdekében ki kell számítanunk, vagy legalábbis meg kell becsülnünk az (5) egyenletben szereplő fizikai paramétereket. A rendszer sajátfrekvenciái pedig az $f_i = 1/(2\pi\sqrt{\gamma_i})$

összefüggésből számíthatók ki a γ_i sajátértékek ismeretében. Ezeket, illetve a megfelelő $T_i = 1/f_i$ periódusidőket az Auterbal-inga esetében az 1. táblázatban láthatjuk.

Az ingára szerelt CCD érzékelő elsősorban az ingakar α szögelfordulását képes regisztrálni. A táblázat szerint ezek a T2, T3, T4 transzverzális móduszok. A T4 módusz a torziós lengéseknek felel meg, viszont azt várjuk, hogy a CCD regisztrátumban – kellő frekvenciájú mintavételezés esetén – látszani fognak a T2 és T3 rezgésekhez tartozó sajátfrekvenciák is. Ennek ellenőrzésére elvégeztük egy 5 perces, 12.5 Hz-es mintavételezési frekvenciájú regisztrátum spektrális analízisét. Az idősor egyenletességének biztosításához a teljesítménysűrűség spektrum (PSD) meghatározása előtt Akima spline interpolációval meghatároztuk minden 0.08 másodperces időponthoz tartozó interpolált skála leolvasás értéket. A PSD becslését a Riedel és Sidorenko (1995) által ismertett szinuszos multitaper eljárással végeztük el. Az idősor így kiszámított teljesítménysűrűség spektruma a 6. ábrán látható.

A PSD-ben három jellegzetes összetevő látszik. A legmagasabb frekvenciájú 3.42 Hz-nél található, ami 7%-kal nagyobb a T2 móduszhoz tartozó elméleti értékénél (3.19 Hz). A 0.837 Hz-es összetevő 2%-os eltéréssel megegyezik a T3 elméleti értékével. Érdekes a 0.413 Hz-es összetevő jelenléte, ami a T3 értékének jó közelítéssel a fele. Elképzelésünk szerint a 0.413 Hz-es frekvencia összetevő megjelenésének talán az lehet az oka, hogy a két antiparallel elhelyezésű inga rezgései a felfüggesztő szerkezeten keresztül valamilyen módon egymáshoz csatolódnak. Minden esetre ez a kérdés a mechanikai modell további bővítésével és elemzésével eldönthető lesz.

A kérdés gyakorlati jelentősége abban áll, hogy világosan látszik: az ingakar mozgását leíró idősor a mechanikai rendszer sajátosságaiból fakadóan különböző frekvenciájú rezgéseket tartalmaz. A nyugalmi helyzet becslése szempontjából számunkra csak a T4 mód érdekes. Ezért a nyugalmi helyzetre vonatkozó skálaolvasás becslése előtt kívánatos az idősorból eltávolítani mindazokat a frekvenciákat, amelyek a becslés szempontjából mérési „zajnak” tekinthető rezgési módokhoz tartoznak.

4 Az inga csillapodásának fizikai modellje

4.1 Viszkózus csillapítási modell

Az ingaházban lengő ingakar mozgását legegyszerűbben viszkózusan csillapított torziós lengésként tudjuk modellezni. A csillapított rezgések elmélete szerint (Landau és Lifsic 1974) az inga esetében (alulcsillapított eset) a keletkező mozgás a következő 5 paraméteres függvénnyel írható le (x a leolvasás, t az idő):

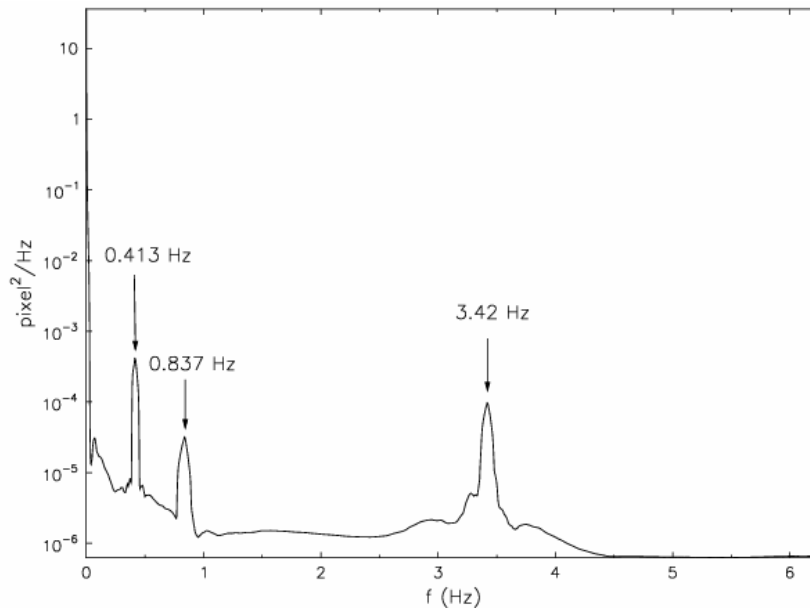
$$x = a_0 + a_1 e^{-a_2 t} \cos(a_3 t - a_4), \quad (6)$$

ahol a_0, \dots, a_4 a mozgásra jellemző paraméterek.

Számunkra az a_0 paraméter becslése az, ami különösen érdekes, mert ez az inga nyugalmi helyzetéhez tartozó leolvasás értéke.

1. táblázat. Az Auterbal-inga számított sajátfrekvenciái és periódusidői. A táblázatban csak a *-gal jelölt móduszokhoz tartozik jelentős nagyságú α amplitúdó

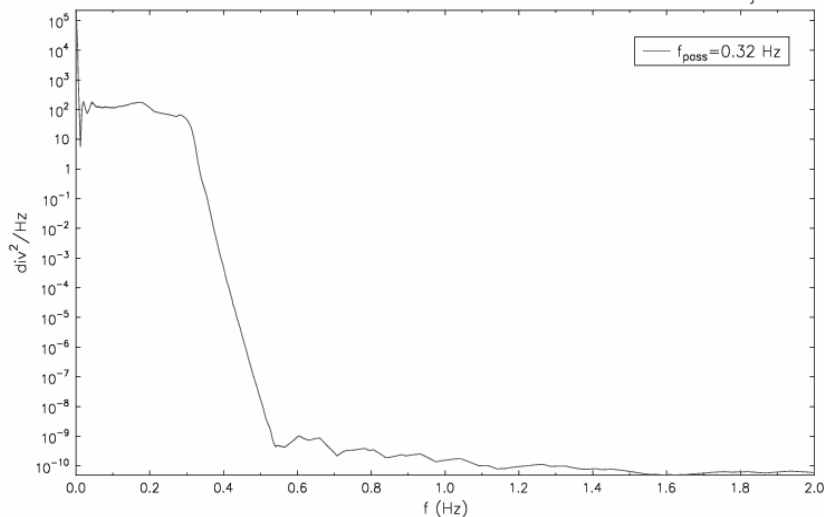
Transzverzális rezgési móduszok	f_i [Hz]	T_i [s]
$i = 1$ (T1)	26.044	0.0384
$i = 2$ (T2*)	3.1859	0.3139
$i = 3$ (T3*)	0.8560	1.1683
$i = 4$ (T4*)	0.00096853	1032.50
Longitudinális rezgési móduszok	f_i [Hz]	T_i [s]
$i = 1$ (L1)	2.1754	0.4597
$i = 2$ (L2)	1.5848	0.6310
$i = 3$ (L3)	0.8054	1.2416



6. ábra. 12.5 Hz-es mintavételezési frekvenciájú CCD regisztrátum idősorának teljesítménysűrűség spektruma

Az előző részben mondottak szerint egy 19-ed rendű aluláteresztő IIR (végtelen impulzusválaszú) Butterworth-szűrőt terveztünk, mellyel eltávolítottuk a jelben található 0.4 Hz-nél magasabb frekvenciákat. Ennek a szűrőnek a tervezés szerint a levágási frekvenciája 0.32 Hz, az elnyomási frekvenciája pedig 0.4 Hz. Az aluláteresztő szűrővel szűrt, a [] (négyyszög) inga 1. azimutjában mért idősor 7. ábrán látható teljesítménysűrűség-spektruma (PSD) jól mutatja a szűrés hatékonyságát, ugyanis a szűrt jel teljesítménye a 0.5 Hz-es és magasabb frekvencián már 11 nagyságrenddel lecsökkent.

A magas frekvenciák kiszűrése utáni adatsoron elvégeztük az elméleti exponenciális csillapítási modell illesztését és a nyugalmi leolvasás becslését. Az ingakar T4 módú csillapítatlan torziós rezgésének 1032 másodperc körüli periódusidejét a fellépő viszkózus csillapítás jelentősen befolyásolja.



7. ábra. A szűrt 4 Hz-es mintavételezési frekvenciájú, a [] inga 1. azimutjában rögzített CCD regisztrátum idősorának teljesítménysűrűség spektruma (div jelöli a skálaleolvasási egységet)

Ha a (6) egyenletet a szokásos nemlineáris legkisebb négyzetes kiegyenlítési feladatként fogalmazzuk meg, akkor a közvetítő egyenletek az n adatpontra az alábbiak lesznek:

$$c_0 + c_1 e^{-a_2 t_i} \cos(a_3 t_i) + c_2 e^{-a_2 t_i} \sin(a_3 t_i) - x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ez az egyenletrendszer optimális legkisebb négyzetek szerinti becslést szolgáltat a keresett 5 paraméterre. Mivel a paraméterek egy része nem lineáris, ezért szükséges az új paramétereket felhasználva megismételni a kiegyenlítést újból és újból addig, amíg az iteráció fixponthoz nem konvergál.

A meghatározásba bevont, a [] inga 1. azimutjában mért idősor adatok egy kezdő t_1 és egy végső t_2 időpont között helyezkedtek el. Az illeszkedést elsősorban abból a szempontból vizsgáltuk meg, hogy az a_0 paraméter becslése mennyiben tért el a helyes $a_0 = 422.48$ skálaosztás egység értéktől. Ezeket az eltéréseket t_1 és t_2 függvényében a 2. táblázatban találhatjuk meg.

A 2. táblázatból láthatjuk, hogy az optimális megoldást a 150 és 600 másodperc közötti leolvasás adatokhoz történt illesztés adta. Természetesen még számos további vizsgálatot kell elvégezni annak érdekében, hogy valóban a legoptimálisabb becslést kaphassuk meg a kezdeti leolvasások alapján, és hogy hogyan tudjuk eldönteni azt, mi legyen t_1 és t_2 optimális értéke. Minden esetben elmondhatjuk, hogy ezek az eredmények biztatóak és azt mutatják, hogy akár néhány tized skálaosztás egység pontossággal is képesek lehetünk előre jelezni az inga nyugalmi helyzetéhez tartozó leolvasást csupán az első 10 perc mérési adataira támaszkodva.

4.2. Áramlási modell

Az ingakar mozgásának pontosabb modellezése csak áramlási modellek segítségével lehetséges. Ezek a modellek a végelemek módszerén alapulnak és képesek figyelembe venni a mozgó testek, az üreg és a csillapító közeg (levegő) geometriai és fizikai paramétereit. Azt mondhatjuk, hogy bonyolult szilárdtest – folyadék (levegő) kölcsönhatás lép fel az ingaház belsejében, mert a szilárd test és a levegő mozgása egymáshoz csatolódik, egymást jelentősen befolyásolja. Az ilyen jellegű problémákat a szakirodalomban „multi-physics problem” elnevezéssel illetik, mert mind mechanikai, mind áramlási modellekre szükség van a feladat megoldásához, és ezeket együttesen kell kezelnünk.

A levegő viszkózus (súrlódó), és normál hőmérsékleten, valamint nyomáson kb. 100 m/s-os áramlási sebességig összenyomhatatlan folyadéknak tekinthető. Ekkor a mozgásának leírására az alábbi Navier-Stokes egyenlet szolgál (Pozrikidis 2001, 282.o.)

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F},$$

ahol \mathbf{v} a sebesség, p a nyomás, ρ a tömegsűrűség, \mathbf{F} a folyadékra ható térfogati erő, D/Dt az anyagi derivált, ν pedig a kinematikai viszkozitás. A Navier-Stokes egyenlet Newton második törvényének felírása a súrlódásos közeg áramlására. Az egyenlet alapján az ingaházban mozgó ingakar és az áramló levegő kétdimenziós, numerikus áramlástan (CFD) modellezését végeztük el.

Ehhez először is szükségünk volt a modell geometriai és fizikai paramétereinek felvételére. A 8. ábra mutatja a felvett modell geometriai paramétereit és a számításhoz felhasznált numerikus hálót.

A felvett fizikai paraméterek a következők voltak (cm, g, hektoszekundum egységekben):

- a levegő sűrűsége: 0.00129,
- viszkozitása: 0.0182,
- a torziós szál állandója: 660,
- a lengőkar tehetetlenségi nyomatéka: 2400, a kar homogén tömegeloszlású.

A kezdeti feltételek:

- kezdeti szögelfordulás: -0.02 rad,
- a kezdeti szögsebesség: 0.

A numerikus áramlástani vizsgálatokhoz, a szilárd test (ingakar) és folyadék (levegő) mozgásának analitikus leírásához a Janela et al. (2005) által javasolt büntetőfüggvény módszert alkalmaztuk.

A felvett numerikus háló (végelemek) háromszögeinek száma 15386, a csúcspontok száma 7829 volt. A büntetőfüggvény paraméterére 10^{-6} -os értéket vettünk fel.

2. táblázat. A [] inga l. azimutjában mért idősor becült a_0 paraméter eltérése a helyes értéktől az illesztés kezdő és végső időpontja függvényében (skálaosztás egységben)

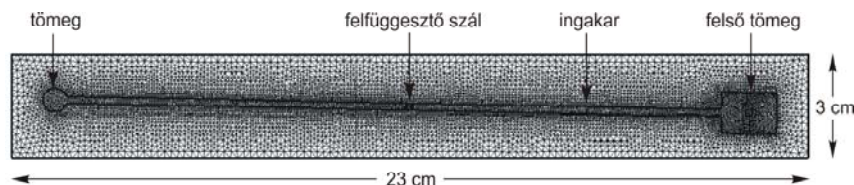
t_1 (s)	t_2 (s)	eltérés (div)
60	400	-7.18
100	400	-11.26
60	600	-2.80
120	600	-1.5
180	600	0.54
150	600	-0.16
150	720	0.42
150	660	0.79
150	420	-0.93

A számítás elindításához a kezdeti sebességmezőt a Stokes-egyenletek megoldásával számítottuk. A számítások időlépésköze 20 s volt, a lépések száma pedig 50.

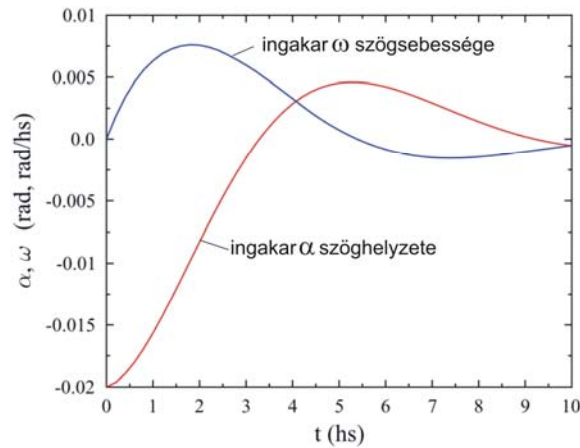
A büntetőfüggvény módszer részletei megtalálhatók a vonatkozó szakirodalomban (Janela et al. 2005). Az eljárás lényege röviden az, hogy minden időlépésben meg kell oldani egy két egyenletből álló egyenletrendszert a numerikus háló háromszögelemein, amely egyenletekben a büntetőfüggvény reciprokaként adódó nagy számmal való szorzás a mozgó ingakart leíró tartomány belsejében mintegy kikényszeríti a közel zérus deformációt. Ez eredményezi a modellezés során a kar merev testként történő mozgását. A probléma numerikus megoldásához egy közel 400 soros, a FreeFem++ szoftver (<http://www.freefem.org>, 2011-01-25) programnyelven készített saját fejlesztésű eljárást használtuk fel.

A 9. ábrán bemutatjuk egy olyan szimuláció eredményét, amelynek során sikeresen modelleztük az ingakar mozgását. A szimulált elfordulási idősorhoz elvégeztük a (6) modell illesztését (az a_0 paraméter most zérus értékű). Az illesztési eltérések 10^{-4} rad (0.2 – 0.3 skálaosztás) nagyságrendű 400 másodperc körüli periódusidejű kvázi periodikus eltérést mutatnak a viszkózus modellhez képest. A CCD-érzékelővel nyert idősorok feldolgozása esetén is sok esetben hasonló jellegű eltéréseket tapasztaltunk a viszkózus modellhez képest. Ez minden esetre azt jelzi, hogy az egyszerű viszkózus csillapítási modell nagy pontossági igények esetén már nem biztos, hogy kielégítő.

A szimulációból meghatározható a tényleges lengésideő, a csillapításra korrigált lengésideő és az a_2 viszkózus csillapítási paraméter is. A modellezésből kapott korrigált lengésideő 1027 s volt (az elvi 1198 s helyett), az a_2 csillapítási paraméter értéke pedig 0.264 lett az elvi 0.4 helyett. Azt is tapasztaltuk, hogy a numerikus háló felbontásának, a viszkozitásnak és a büntető paraméter változtatásának függvényében a számítás bizonyos esetekben instabillá válik. Ezért azt tervezzük, hogy másfajta számítási eljárásokkal is modellezzük az ingakar mozgását. Ilyen módszer lehet például a Lagrange-multiplikátor/fiktív tartomány eljárás (Glowinski et al. 1998). Ezen kívül lehetőség van a valódi térbeli modellezésre is, például a kifejezetten „multi-physics” problémákra kidolgozott oomph-lib eljáráskönyvtár (Heil és Hazel 2006) segítségével.



8. ábra. Az E-54-es Eötvös-inga kétdimenziós numerikus áramlástani vizsgálatokhoz kialakított geometriai modellje és az ingakarra főbb méretei (felülnézetben)



9. ábra. Az E-54-es Eötvös-inga numerikus áramlástanai modellezéssel számított α elfordulási szöge és ω szögsebessége a t idő függvényében (t mértékegysége 1 hs = 100 s)

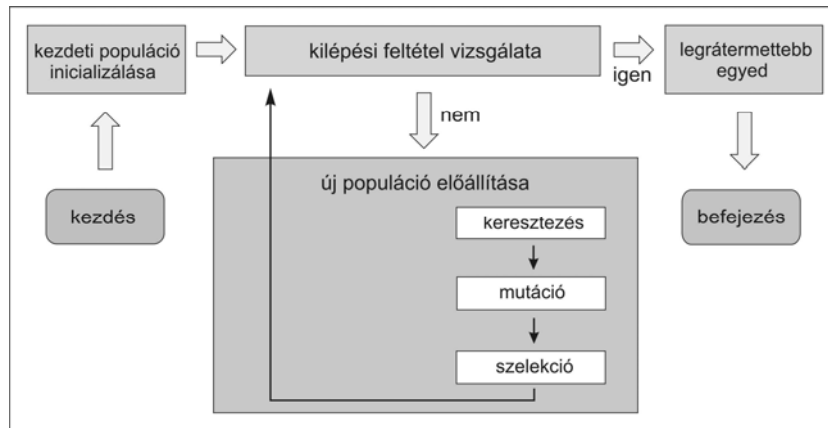
5 A differenciális evolúciós algoritmus alkalmazása

Az evolúciós algoritmus olyan keresési technika, amellyel optimumot vagy egy adott tulajdonságú elemet lehet keresni. A matematikai modell logikája a jól ismert biológiai hasonlatra épül. Az evolúciós algoritmusok számítógépes szimulációkkal valósíthatók meg. A populáció egyedeit a keresési tér elemei alkotják, melyeket keresztezni (rekombinálni) és mutálni lehet, így új egyedek hozhatók létre. A keresési téren értelmezett célfüggvény a rátermettségi (fitness) függvény. Az evolúciós algoritmus egyrészt új egyedeket hoz létre a keresztezés és a mutáció operátorokkal, másrészt kiszűri a rosszabb célfüggvény értékkel rendelkező egyedeket és eltávolítja a populációból. Általában az algoritmus a globális optimumhoz konvergál, ebben tud többet mint egy hagyományos lineáris LKN illesztés; nem kellene előzetes értékek, csak határértékek a paraméterekre. Az evolúciós algoritmus logikáját a 10. ábrán bemutatott folyamatábrán követhetjük. Esetünkben az alkalmazott evolúciós algoritmus a differenciális evolúció volt (Storn és Prince 1997).

Az inga lengését leíró egyszerűsített differenciálegyenlet-rendszer (figyelembe véve a lelógó tömeg rezgéseit és viszkózus csillapítást feltételezve):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x; \\ \frac{dv_x}{dt} &= \frac{-\Omega_0}{Q \cdot f_0} \cdot v_x + \frac{C_1 \cdot \omega_0^2}{f_0} \cdot y - \frac{\Omega_0^2}{f_0} \cdot x; \\ \frac{dy}{dt} &= v_y; \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{C_2 \cdot \Omega_0}{Q \cdot f_0} \cdot v_x + \frac{C_2 \cdot \Omega_0^2}{f_0} \cdot x - \frac{\omega_0^2}{f_0} \cdot y. \end{aligned}$$

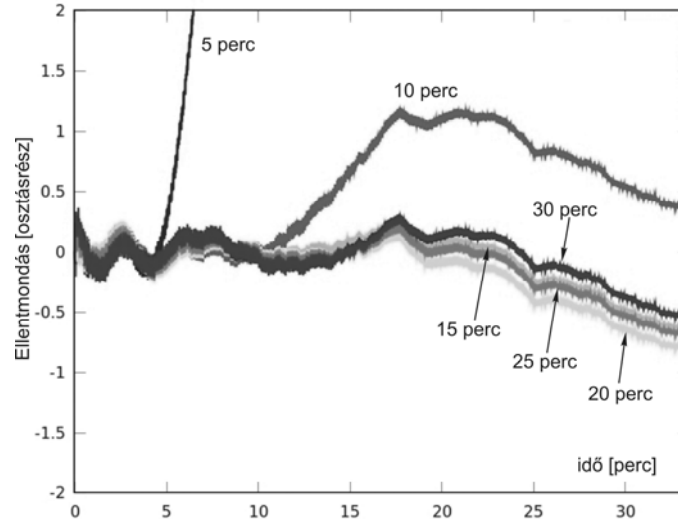
Az egyenletekben x az ingakar szögelfordulása, y a lelógó tömeg függőlegessel bezárt szöge, v_x és v_y a szögsebességek, Ω_0 az ingakar csillapítatlan lengésének körfrekvenciája, ω_0 a lelógó tömeg rezgéseinek sajátfrekvenciája, Q a lengés csillapításának tényezője, f_0 , C_1 és C_2 pedig az Eötvös-inga geometriai és fizikai paramétereiből levezethető állandók. Az egyenleteket valamely t_0 időpontban felvett kezdőparaméterek mellett $(x_0, v_{x0}, y_0, v_{y0})$ numerikusan integrálva meghatározható az ingakar elfordulása tetszőleges időpontban, ezáltal (a tükör és a skála közötti távolság figyelembe vételével) számítható a leolvasás értéke is.



10. ábra. Probléma megoldása evolúciós algoritmussal

Fogalmazzuk meg az illesztési feladatot a következőképpen: a rögzített mérések időszora alapján keressük a differenciálegyenlet-rendszer kezdőértékeit, valamint az ingára jellemző állandók (pontosított) értékeit. Tekintsük célfüggvénynek adott paraméterek mellett a kiintegrált leolvasás-értékek és a tényleges leolvasás-értékek eltéréseinek négyzetösszegét. A feladat gyakorlati végrehajtása során a leolvasás-értékek számításakor az inga driftjét is figyelembe vesszük, valamint természetesen *azt az elméleti leolvasás-értéket, ami körül a lengés történik*. Ez másodfokú driftközelítés esetén három plusz paramétert jelent az illesztésben.

A gyakorlati megvalósítás C nyelven készült, a numerikus integráláshoz a IV. rendű Runge-Kutta módszert alkalmaztuk. Kísérleteinket az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet E-54 típusú ingájával végeztük 2007. október 20-án, a kísérleti mérés helyszíne az ELGI Mátyás-hegyi laboratóriuma volt. Az illesztés maradék ellentmondásaira egy példa látható a 11. ábrán. A leolvasás-idősorokat előzetesen nem szűrtük. Bár előrejelzés szempontjából a 4. fejezetben ismertetett módszerhez képest kevésbé kedvező eredményeket kaptunk, lehetőségünk adódik az inga néhány fizikai paraméterének (pl. ingakar hossza, tehetetlenségi nyomaték, csillapítási tényező, tükör-skála távolság, drift paraméterek) pontosabb megismerésére.



11. ábra. A differenciális evolúciós módszerrel történő illesztés maradék ellentmondásai osztásegyységben, az illesztés időtartama szerint (5 perc és 40 perc között, 5 perces lépésekben).

6 Összefoglalás

Tanulmányunkban bemutattuk, hogy ígéretes lehetőség van az Eötvös-inga hosszú mérési idejének jelentős csökkentésére a modern technika segítségével. A CCD érzékelőkkel rögzített mérési adatokat kiértékelve, és az inga részletes mechanikai és fizikai modelljét felhasználva a számításokhoz, megmutattuk, hogy elegendő lehet az azimutonkénti 10 perces mérési idő – a jelenlegi 40 perc helyett – az ingakar nyugalmi helyzetéhez tartozó skálaleolvasás kellően pontos becsléséhez. A 2. táblázat illesztési adatai ugyanis azt mutatják, hogy nagyjából 10 perc után a vizsgált és szűréssel simított idősor esetében a csillapodás utáni helyzet becslési eltérései már 1 skálaosztás egység alatt. Ez a 4. és 9. ábrák tanúsága szerint körülbelül megegyezik azzal az idővel, amikor az ingakar mozgási szögsebessége zérussá válik. Természetesen ahhoz, hogy ezt az eljárást rutinszerűen tudjuk alkalmazni a jövőben a terepi Eötvös-inga mérések esetében, még további fejlesztésekre és vizsgálatokra van szükség.

Köszönetnyilvánítás. Kutatásaink a 76231 sz. OTKA támogatásával folynak. Köszönettel tartozunk az Eötvös Loránd Geofizikai Intézetnek és Csapó Gézának az E-54 típusú ingával folytatott kísérletek lehetővé tételéért.

Hivatkozások

- Duchon C E** (1979): Lanczos Filtering in One and Two Dimensions. *Journal of Applied Meteorology* 18 (8), 1016-1022.
- Glowinski R, Pan T W, Hesla T I, Joseph D D** (1998): A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flow. *Int. J. of multiphase flow*, 25, 755-794.
- Heil M, Hazel A L** (2006): oomph-lib – An Object-Oriented Multi-Physics Finite-Element Library. In: *Fluid-Structure Interaction*, Editors: M. Schafer und H.-J. Bungartz. Springer (Lecture Notes on Computational Science and Engineering), 19-49.
- Janela J, Lefebvre A, Maury B** (2005): A penalty method for the simulation of fluid-rigid body interaction, *ESAIM Proceedings*, 14, 201-212.
- Kovács Á, Nagy G** (2010): A Duna víztömegének hatása a nehézségi gradiensekre. TDK dolgozat, BME, Geodézia Szekció.
- Landau L D, Lifšic E M** (1974): *Elméleti fizika I. Mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Pozrikidis C** (2001): *Fluid dynamics: theory, computation and numerical simulation*. Kluwer Academic Publishers. 658 o.
- Riedel K S, Sidorenko A** (1995): Adaptive Smoothing of the Log-Spectrum with Multiple Tapering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43, 188-195.
- Selényi P** (1953): Eötvös Loránd összegyűjtött munkái, Akadémiai Kiadó, 386 o.
- Scharr H** (2000): *Optimal Operators in Digital Image Processing (Optimale Operatoren in der Digitalen Bildverarbeitung)*. PhD disszertáció, Heidelberg, 190 o.
- Storn R, Price K** (1997): Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*, 11, 341-359.
- Völgyesi L, Égető Cs, Laky S, Tóth Gy, Ultmann Z** (2009a): Eötvös-inga felújítása és tesztmérések a budapesti Mátyás-hegyi-barlangban. *Geomatikai Közlemények*, XII, 71-82.
- Völgyesi L, Csapó G, Laky S, Tóth Gy, Ultmann Z** (2009b): Közel fél évszázados szünet után ismét Eötvös-inga mérések Magyarországon. *Geodézia és Kartográfia*, LXI, 11. 71-82.