

OPTIMÁLIS GEOMETRIA KIALAKÍTÁSA DELAUNAY-HÁROMSZÖGELÉSEL FÜGGŐVONAL-ELHAJLÁS INTERPOLÁCIÓ CÉLJÁRA

Ulmann Zita*, Völgyesi Lajos*



Creating optimal geometry by Delaunay triangulation for interpolation of deflection of the vertical – Creating the optimal geometry of the interpolation net is an important part of the computation of deflection of the vertical based on Torsion balance measurements. The triangle chain fitting to the torsion balance stations should be designed to be adequate for the interpolation, that is the distances between the adjacent points should be minimal and the curvature gradients between that selected torsion balance points should be as linear as it possible. So far this task has been performed manually with a huge slave work furthermore do not always succeeded to find the optimal geometry. Delaunay triangulation offers a new opportunity to solve the problem by computer. Selecting the most suitable pairs of points the automatic creation of the interpolation network has been succeeded by an appropriate modification of the Delaunay triangulation.

Keywords: Torsion balance, deflection of the vertical, triangle chain, interpolation, Delaunay triangulation.

Az interpolációs hálózat geometriájának megfelelő kialakítása fontos lépése az Eötvös-inga mérések alapján végzett függővonal-elhajlás interpolációnak. A mérési pontokra illesztett háromszög láncolatokat úgy célszerű kialakítani, hogy a lehető legrövidebb távolságok adódjanak, és a háromszög-oldalak mentén a görbületi gradiensek megváltozása a lehetőségekhez képest leginkább lineáris legyen. Eddig az interpolációs eljárás során ezt a lépést manuálisan oldottuk meg, ami egyrészt óriási munkát jelentett, másrészt nem minden esetben sikerült kialakítani az optimális geometriát. A probléma számítógépes megoldására a Delaunay-háromszögelés kínál lehetőséget. Ennek megfelelő módosításával sikerült a legalkalmasabb pontpárok keresésével automatizálni a hálózati geometria kialakítását a függővonal-elhajlás interpoláció céljára.

Kulcsszavak: Eötvös-inga, függővonal-elhajlás, háromszög láncolat, interpoláció, Delaunay-háromszögelés.

1 Függővonal-elhajlás interpoláció Eötvös-inga mérések alapján

Az 1. ábrán látható tetszőleges P_i és P_k pont között a függővonal elhajlás összetevők $\Delta\xi_{ki}$ és $\Delta\eta_{ki}$ megváltozása (Bíró et al, 2013) és az Eötvös-ingával mérhető W_Δ és W_{xy} görbületi gradiensek kapcsolatát az

$$\int_{ni}^{nk} \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \cong \frac{1}{2} [(\Delta W_{ns})_i + (\Delta W_{ns})_k] n_{ik} = g(\Delta\xi_{ki} \sin \alpha_{ik} - \Delta\eta_{ki} \cos \alpha_{ik}) \quad (1)$$

összefüggés adja meg, ahol a

$$\Delta W_{ns} = \frac{1}{2} (W_\Delta - U_\Delta) \sin 2\alpha_{ik} + (W_{xy} - U_{xy}) \cos 2\alpha_{ik}, \quad (2)$$

amelyben az U_Δ és az U_{xy} az Eötvös-ingával mérhető W_Δ és W_{xy} görbületi gradiensek normálértékei (Völgyesi 1993, 1995). Az (1) integrálnak a trapéz integrálformulával közelítése azonban csak akkor lehetséges, ha a két pont között a gradiensek változása lineárisnak tekinthető. Amennyiben nem

* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp.3. E-mail: ulmann@gmail.com; volgyesi@eik.bme.hu

csak két pont között, hanem nagyobb összefüggő területen szeretnénk függővonal-elhajlás interpolációt végezni, akkor a területet háromszöghálózattal lefedve további két

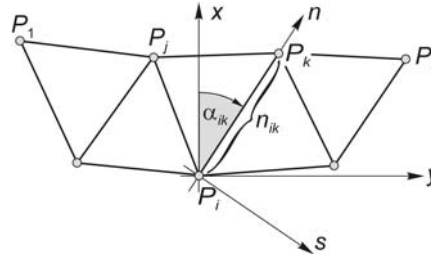
$$\Delta\xi_{ki} + \Delta\xi_{ij} + \Delta\xi_{jk} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta\eta_{ki} + \Delta\eta_{ij} + \Delta\eta_{jk} = 0 \quad (3)$$

összefüggés írható fel valamennyi háromszögre (Völgyesi 1993), mivel az egyes háromszögeken körbehaladva a $\Delta\xi_{ki}$ és $\Delta\eta_{ki}$ összegeknek zérust kell adniuk.

Nagyobb összefüggő területen, ahol a P_1 és a P_n ponton ismertek a függővonal-elhajlás összetevők értékei (1. ábra), az alábbi összefüggések is felírhatók (Völgyesi 1993):

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta\xi_{i+1,i} = \xi_n - \xi_1 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\eta_{i+1,i} = \eta_n - \eta_1. \quad (4)$$

Ekkor, ha az adott területen megfelelő pontsűrűségben állnak rendelkezésre Eötvös-inga mérések, elvégezhető a függővonal-elhajlás interpoláció.



1. ábra. Az interpolációs hálózat pontjai

Az interpoláció fontos lépése az Eötvös-inga mérési pontokhoz illeszkedő olyan interpolációs hálózat kialakítása, melyet alkotó háromszögpontok a lehető legközelebb helyezkednek el egymáshoz képest úgy, hogy a háromszögszögek mentén a görbületi gradiensek megváltozása a lehetőségekhez képest leginkább lineáris legyen. Korábban a modern számítástechnika által kínált lehetőségeket kihasználva olyan szoftvert készítettünk, amely az Eötvös-inga mérések felhasználásával akár láncolat mentén, akár tetszőleges nagyobb területet beborító hálózatokra képes a függővonal-elhajlás értékeit automatikusan meghatározni (Völgyesi 1993, 1995, 2012). A szoftver használata során az egyetlen nehézséget az jelentette, hogy az interpolációs hálózat pontjait az adatbázisból nekünk kellett kiválogatni, és a háromszöghálózat oldalait alkotó pontpárok kiválasztása is csak manuálisan volt lehetséges. Ez nagyobb területek esetén hatalmas munka, ráadásul így nehezen biztosítható az optimális hálózati geometria kialakítása.

Mostani célunk olyan algoritmus elkészítése volt, amely a Delaunay-háromszögelés alapelveit felhasználva képes az interpolációs hálózati geometria automatikus kialakítására.

2 A Delaunay-háromszögelés

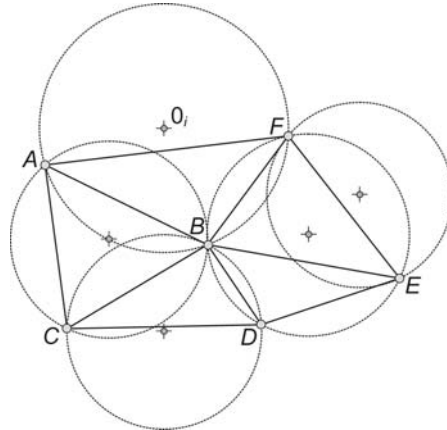
A Delaunay-háromszögelés a számítógépes grafikában illetve a térinformatikában alapvetően elterjedt felületképző algoritmus, számos sikeres korábbi geodéziai alkalmazását ismerjük felületinterpolációra (pl. Kalmár 1994, 2000; Nagy et al 1999). Bemenetként minden esetben két- vagy háromdimenziós pontfelhő szolgál, kimenetként pedig a pontokra illesztett ideális háromszögek csúcspontjainak azonosítóit kapjuk. Mostani esetünkben elegendő a kétdimenziós esettel foglalkoznunk, mivel most nem felületet szeretnénk kialakítani, hanem csak pontpárokat keresünk, amelyekkel egyszerű síkbeli háromszöghálózatot kívánunk létrehozni.

Az ideális Delaunay-háromszögek létrehozására sokféle módszer terjedt el, viszont valamennyi algoritmus közös tulajdonsága, hogy:

- a kapott háromszögek köré írt körön belül nem helyezkedhet el a pontfelhőnek egyetlen további eleme sem, legfeljebb a körökön lehet maximum 4 pont,
- az eljárások a háromszögek legkisebb belső szögét maximalizálják az ún. Delaunay-feltétel szerint (Lee és Schachter 1980), törekedve szabályos háromszögek kialakítására,

- a Delaunay-háromszögek köré írható körök középpontjainak összekötésével kapjuk az ún. Voronoi-cellákat (Lee és Schachter 1980).

A 2. ábra a Delaunay-háromszögelés alapelvét szemlélteti, ahol az A, B, C, \dots, F a pontfelhő pontjai, O_i pedig a háromszögek köré írható körök középpontját jelöli.



2. ábra. A Delaunay-háromszögelés alapelvének magyarázata

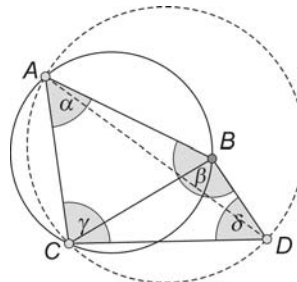
A Delaunay-háromszögek keresésekor a legfontosabb lépés annak eldöntése, hogy valamely D pont a vizsgált ABC háromszög köré írható körön belül vagy kívül helyezkedik-e el. Ez a kérdés a

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

mátrix determinánsának kiszámításával dönthető el (x_i, y_i a pontok vízszintes koordinátái). Amennyiben a determináns értéke pozitív, akkor a D pont a körön belül fekszik, és a létrehozott háromszög nem tekinthető Delaunay-háromszögnek.

A háromszögek kialakítására leginkább elterjedt algoritmusok az „élcseré”, az „inkrementális” és az „oszd meg és uralkodj” algoritmusok (Shewchuk 1997). Ezeknek számos továbbfejlesztett változata is született.

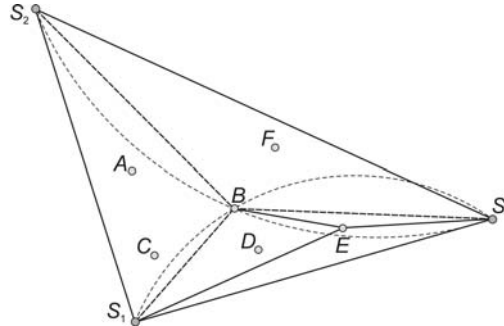
Az élcseré (flipping) algoritmus a kezdeti háromszögek létrehozása után vizsgálja a Delaunay-feltételeket. A 3. ábrán látható $A-B-C-D$ pontok alapján két szomszédos háromszög összekapcsolásával létrejövő négyszögekben összehasonlítja az egymással szemben levő ($\alpha + \delta$ illetve $\beta + \gamma$) belső szögek összegét. A kétféle ABC és BDC vagy ACD és BAD háromszögpár közül azt a felbontást választja, ahol a szemben levő belső szögek összege kisebb mint 180° (esetünkben ez az ABC és BDC háromszög, mivel az $(\alpha + \delta) < 180^\circ$, $(\beta + \gamma) > 180^\circ$). Ezt a választást megerősíti, hogy a 3. ábrán láthatóan a D pont az ABC háromszög köré írt folytonos vonallal jelölt körön kívül esik, míg a B pont az ACD pontok köré írt szaggatott vonallal jelölt körön belül helyezkedik el.



3. ábra. Delaunay belső szög kritériuma

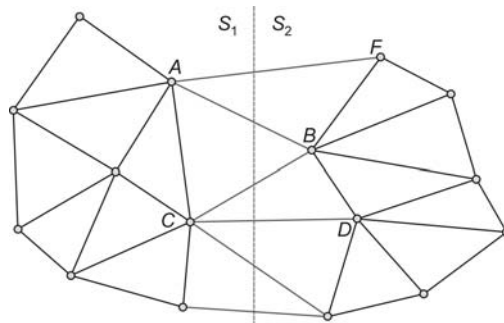
Amennyiben a 4 pont egyetlen körön helyezkedik el (pl. a 2. ábrán a B, D, E, F pontok), akkor mindkét felosztás egyaránt megfelelő.

Az inkrementális (Bowyer-Watson) algoritmus (Bowyer 1981) szerint a pontfelhőt teljesen magába foglaló $S_1S_2S_3$ háromszög (4. ábra) létrehozása után a ponthalmaz egyik pontját (pl. a B pontot) választva a szaggatott vonallal határolt további háromszögek jönnek létre. Az új háromszögek köré írható körök metsző halmazában található új (pl. E) ponton keresztül képződnek az új S_1BE, BS_3E illetve S_1ES_3 háromszögek, miközben a megelőző S_1BS_3 háromszöget törölni kell. A folyamat ismétlődő (rekurzív) módon folytatható, míg az összes pontra nem illeszkedik háromszögháló.



4. ábra. Az inkrementális algoritmus magyarázata

Az oszd meg és uralkodj alapelven működő algoritmus a ponthalmazt az 5. ábrán látható módon két (esetleg több) kisebb részre osztja, utána az egyes (S_1 és S_2) részeken előállítja a Delaunay-háromszöghálót, végül a részek összekapcsolása következik.



5. ábra. Az „oszd meg és uralkodj” algoritmus alapelve

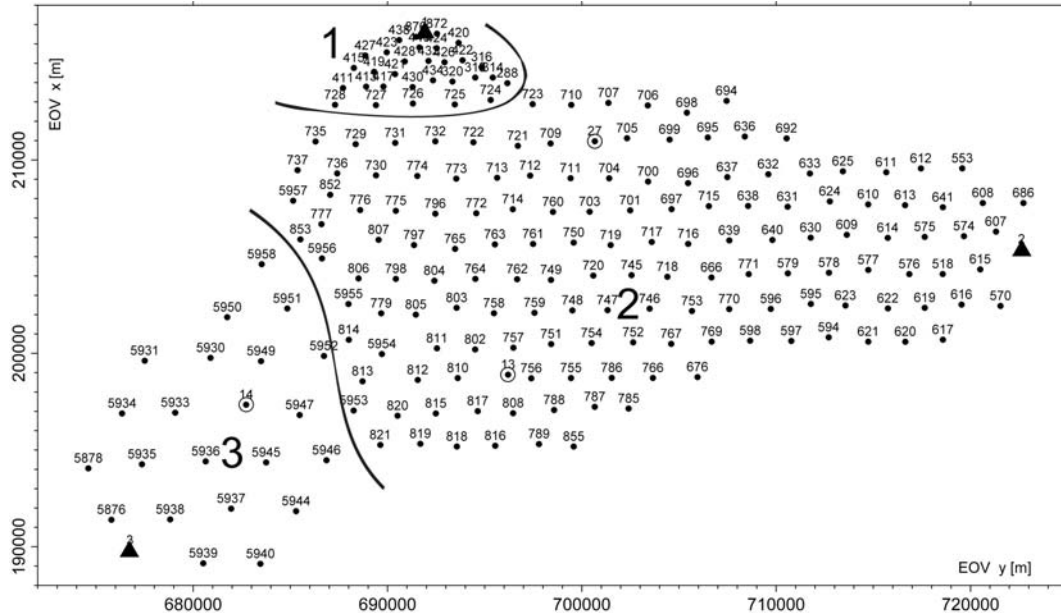
A vizsgálataink szerint az esetünkben mindhárom algoritmus jól alkalmazható, némi különbség a számítógépes futási időben mutatkozott.

A bemutatott három alaptípust Ruppert (1995) alapelvén többen továbbfejlesztették. A fejlesztések mindegyike további (ún. Steiner-) pontokkal bővíti az adott ponthalmazt, így optimalizálva a háromszöghálózat kialakítását. Az egyes módszerekkel előállított sűrített háromszöghálók kismértékben különböznek egymástól.

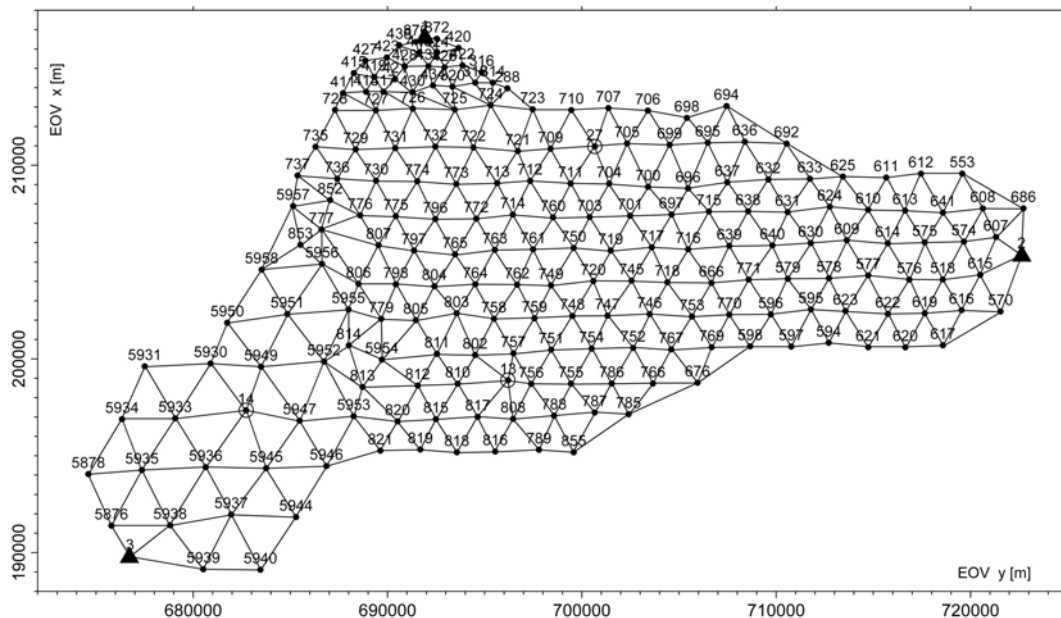
3 Vizsgálatok a Cegléd-környéki teszt-területen

Korábban számos vizsgálatot végeztünk az Eötvös-ingával részletesen felmért Cegléd környéki teszt-területen a függővonal-elhajlás interpolációra vonatkozóan. A 6. ábrán látható mintegy 1200 km^2 kiterjedésű területen az ELGI főleg 1949-1950. évi méréseiből származó 206 Eötvös-inga mérési pont, 3 asztrogeodéziai és 3 asztrogravimetriai pont található. Az Eötvös-inga állomások helyét kerek pontok jelölik (felettük a mérési pont számával), a háromszögek az asztrogeodéziai, a kettős körök pedig az asztrogravimetriai pontok. A kereten EOV koordináták láthatók. Azért választottuk ezt a területet a vizsgálataink céljára, mert az ábrán látható változó pontsűrűség miatt magyarországi viszonyok között itt a legnehezebb az interpolációs hálózat automatikus előállítása. A terület a pont-

sűrűség tekintetében három különböző részre osztható. A 6. ábrán a „2” és a „3” számmal jelzett területen a pontok egymástól mért távolsága és a területi eloszlása megfelel az átlagos magyarországi síkvidéki viszonyoknak (itt az átlagos pontsűrűség 2, illetve 3-3.5 km), azonban az ábra felső részén az „1” jelű területen Pilis és Albertirsa közelében az Eötvös-inga mérési állomásokat az átlagos alföldi gyakorlattól eltérően nagyobb pontsűrűséggel telepítették. Ez a rész Gödöllői-dombság déli nyúlványa, ahol az Eötvös-ingával mérhető gradiensek változása markánsabb, így ezen a tagoltabb topográfiájú, "zavartabb" területen az észleléseket nagyobb (átlagosan 1-1.5 km) pontsűrűséggel végezték. Az adott mérési pontokra a korábban manuálisan illesztett interpolációs hálózat a 7. ábrán tanulmányozható.

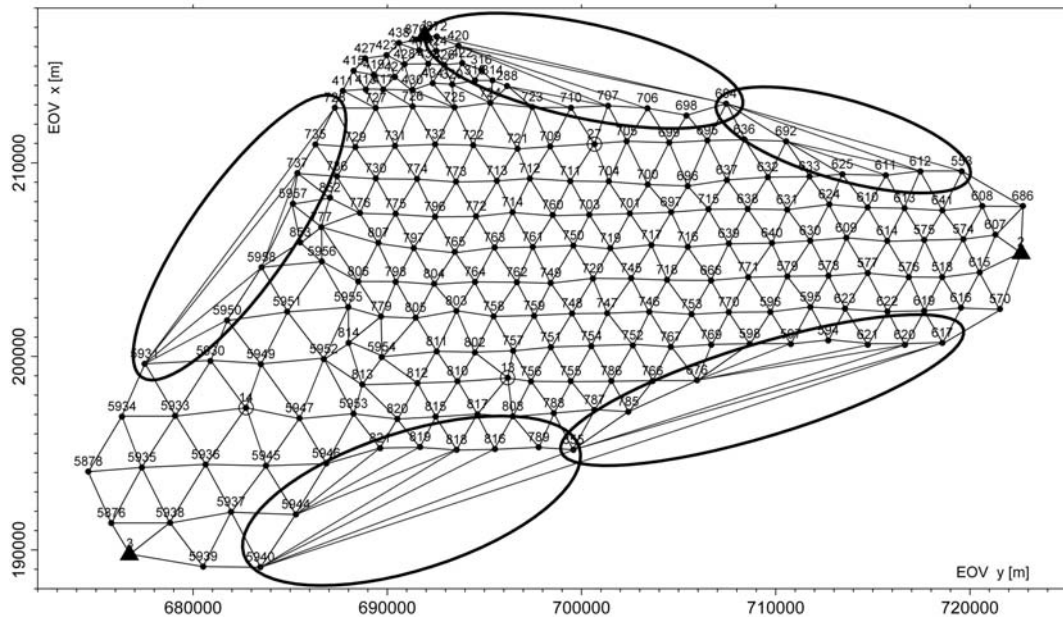


6. ábra. Az Eötvös-inga mérési pontok területi eloszlása a Cegléd környéki teszt-területen



7. ábra. A korábbi manuálisan kialakított interpolációs hálózat

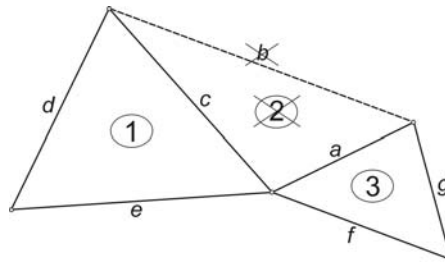
A Delaunay-háromszögelés alapelvét alkalmazó, tetszőleges pontfelhőt felületté alakító szoftvereknek több fajtája létezik, – mi a MATLAB programot használtuk. Ennek bemenő adatai a pontok kétdimenziós koordinátái, kimenete pedig a Delaunay háromszögek csúcspontjai. A MATLAB szoftverbe épített Delaunay-háromszögelést végző modul által a teszt-területünkre előállított hálózatot a 8. ábrán mutatjuk be. A terület szélein jelentkező nem kívánatos háromszögek arra figyelmeztetnek, hogy a módszer további finomításokat igényel, ugyanis a széleken kialakított háromszögek pontjai között olyan nagy távolságok adódtak, amelyek esetében egészen biztosan nem teljesül az interpoláció legfontosabb követelménye, miszerint két szomszédos pont között a görbületi gradiensek megváltozásának lineárisnak kell lenniük. Ráadásul a fölösleges háromszögoldalakra további egyenleteket írunk fel újabb információ (mérés) nélkül, ami valamilyen mértékben biztosan torzítja az alakmátrix súlyviszonyainak megváltozásán keresztül az ismeretlen függővonal-elhajlások értékét.



8. ábra. Delaunay-háromszögeléssel előállított hálózat, a terület szélein jelentkező nem kívánatos háromszögekkel

A problémát egyébként az okozza, hogy a MATLAB Delaunay-algoritmusa mindenképpen létrehozza a ponthalmaz konvex burkoló görbét, ezért ebből elő kell állítanunk a konkáv burkoló görbét, a nem kívánatos háromszögek elhagyásával.

A konkáv burkológörbe előállítására a szakirodalom alapján több lehetőség kínálkozik (pl. Ruppert 1995). Hazai példaként Kalmár (1994) a széleken keletkező elnyújtott háromszögek kiküszöbölésére a ponthalmazt kiegészítette 4 (keret)ponttal úgy, hogy ez a négyszög az összes alap-pontot már tartalmazza, és a 4 ponttal kiegészített ponthalmazra végezte el a háromszög-lefedést, majd az összes, keretpontokra illeszkedő háromszöget kihagyta a végső háromszöglefedésből. Mi inkább a háromszögoldalak hossza arányának vizsgálatán alapuló eljárást alkalmaztuk (ezzel az egyszerűbb eljárással ugyanis nem csak a terület szélein, hanem a terület belsejében adódó kedvezőtlen háromszögoldalak is kiszűrhetők). A háromszögoldalak hossza arányának vizsgálatán alapuló eljárásnak az a lényege, hogy valamennyi előállított Delaunay-háromszögre megállapítható egy $p = a/b$ (minimális / maximális oldalhossz) arány, amely alapján ki lehet szűrni az olyan háromszögeket, amelyek alakja jelentősen eltér az Eötvös-inga mérési állomások területi eloszlására leginkább jellemző egyenlő oldalú háromszögek alakjától. Ezt a 9. ábrán szemléltetjük, ahol pl. a 2-es jelű háromszög legkisebb a oldala és a legnagyobb b oldala hosszának aránya meghaladja a felvett $p = 1/2$ küszöbértéket, így ezt a háromszöget ezen szűrés alapján kizárhatjuk az előzetesen előállított háromszögek közül.

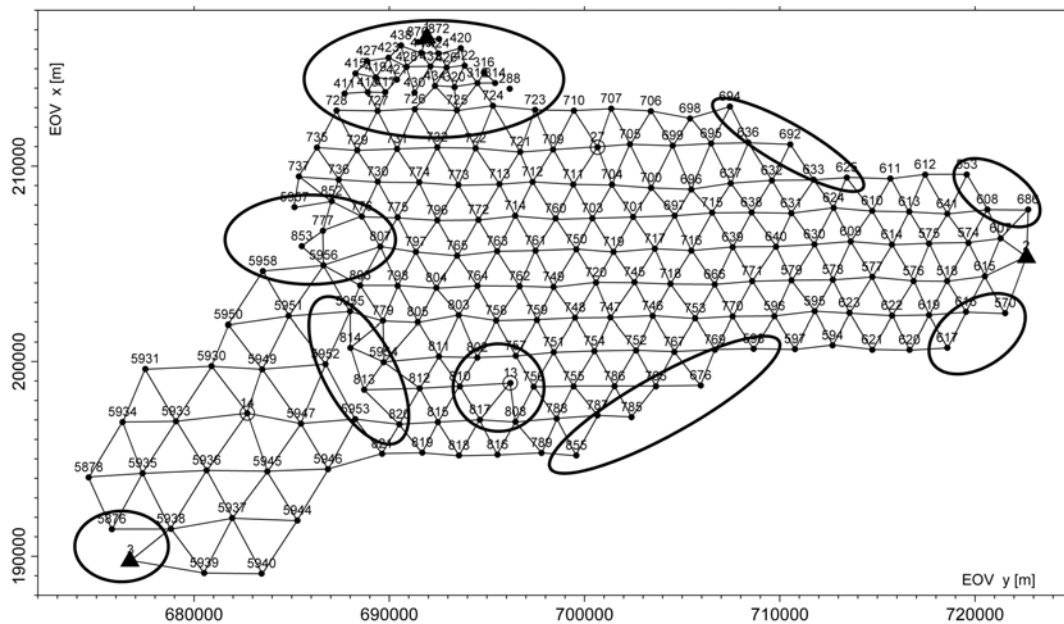


9. ábra. Alkalmatlan formájú Delaunay-háromszög kiszűrése az oldalhosszak aránya alapján

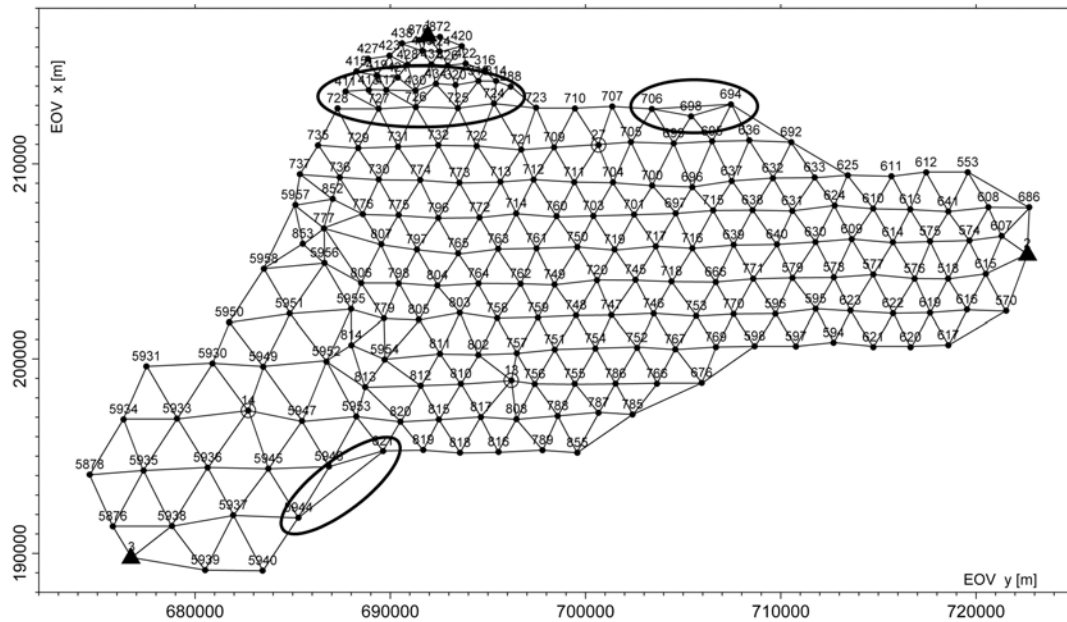
Az oldalhosszak arányán alapuló szűrés esetében legnehezebb feladat a megfelelő p oldalarány megállapítása. A teszt-területünkön többféle oldalarányú szűréssel próbálkoztunk. A 10. és a 11. ábrán a $p = 2/3$, illetve a $p = 1/2$ küszöbértékhez illeszkedő hálózati konfigurációt hasonlíthatjuk össze. A két hálózat jelentősen különbözik egymástól, a 10. ábrán látható hálózat a „túlszűrés” áldozata lett, míg a $p = 1/2$ értékhez tartozó kép gyakorlatilag megegyezik a 7. ábrán bemutatott manuálisan meghatározott hálózattal. Ráadásul itt a Delaunay-háromszögeléssel kialakított nagyobb pontsűrűségű felső hálózatrész jobban is illeszkedik az alatta elhelyezkedő ritkább pontsűrűségű hálózatrészhez, mivel rövidebb oldalakkal csatlakozik a kettő egymáshoz.

4 Függővonal-elhajlás interpoláció a különböző kialakítású hálózatokon

Az első részben már említett szoftverünkkel összehasonlító számításokat végeztünk a különböző geometriai kialakítású hálózatokra. Korábban a szoftver használata során nehézséget jelentett, hogy az interpolációs hálózat pontjait az adatbázisból nekünk kellett kiválogatni, és a háromszöghálózat oldalait alkotó pontpárok kiválasztását sem tudtuk automatizálni. Ez nagyobb területek esetén igen nagy munka volt és eddig nem vizsgáltuk behatóbban azt sem, hogy a hálózat geometriai elrendezése milyen hatással van az interpolációra. Most először nyílt lehetőségünk Delaunay-háromszögeléssel automatikusan előállított interpolációs hálózatra is elvégezni a számításokat és összehasonlítani az eredményeket a korábbi hálózatra interpolált értékekkel.



10. ábra. A $p=2/3$ oldalarányú szűréssel adódó háromszög-vesztés a jelölt részekben



11. ábra. A $p=1/2$ oldalárányú szűréssel adódó megoldás eltérése a jelölt részekben a 7. ábrán látható manuálisan készített változattól

Összehasonlító számításainkat a 7. ábrán látható korábban manuálisan létrehozott hálózatra és a 11. ábrán látható Delaunay-háromszögeléssel a nem kívánatos háromszögek megfelelő kiszűrésével kialakított interpolációs hálózatra végeztük el. A területen található (háromszögekkel jelölt) három asztrogeodéziai pontban ismert függővonal-elhajlás adatok az interpoláció kiinduló értékei, míg a dupla körökkel jelölt 13, 14 és 27 jelű asztrogravimetriai pont (Bíró és mások 2013) ismert függővonal-elhajlás értékei ellenőrzésre szolgáltak. A függővonal-elhajlások ξ és η összetevőinek az ellenőrző pontokban ismert, és a két különböző hálózatra interpolált értékeit az 1. és a 2. táblázatban foglaltuk össze. Az első oszlopban az ellenőrző pont számát, a másodikban az asztrogravimetriai úton meghatározott ellenőrző értékeket, a többi oszlopban pedig a számított függővonal-elhajlás értékeket, illetve az eltéréseket láthatjuk szögmásodperc értékben. Mindkét táblázat utolsó sorában az interpolált és az ismert összetevők különbségének abszolút értékéből számított átlagos eltéréseket tüntettük fel.

1. táblázat. A függővonal-elhajlások ξ összetevőjének adott és interpolált értékei, valamint ezek eltérései egymástól.

ξ ["]	Asztrograv.	Manuális hálózatra		Delaunay hálózatra	
Pont	Adott	Számított	Eltérés	Számított	Eltérés
13	5.31	5.64	0.33	5.62	0.31
14	5.27	4.27	-1.00	4.42	-0.85
27	4.80	6.04	1.24	5.95	1.15
			0.86		0.77

2. táblázat. A függővonal-elhajlások η összetevőjének adott és interpolált értékei, valamint ezek eltérései egymástól.

η ["]	Asztrograv.	Manuális hálózatra		Delaunay hálózatra	
Pont	Adott	Számított	Eltérés	Számított	Eltérés
13	3.12	1.83	-1.30	2.01	-1.11
14	3.30	1.90	-1.40	2.09	-1.21
27	5.42	1.56	-3.86	1.59	-3.83
			2.18		2.05

A táblázatok adatai alapján megállapítható, hogy a korábban manuálisan és a Delaunay-háromszögeléssel kialakított hálózatra elvégzett interpolációs számítások eredményei alig térnek el egymástól. Ez egyértelműen bizonyítja, hogy sikerült megfelelően automatizálni az interpolációs hálózat kialakítását, hiszen az erre meghatározott függővonal-elhajlások gyakorlatilag megegyeznek a korábban manuálisan kialakított hálózatra számított értékekkel. Ugyanakkor – ha minimális mértékben is, de a Delaunay-háromszögeléssel kialakított interpolációs hálózat esetében kaptuk a legkisebb eltéréseket az adott és az interpolált értékek között. Ez azt jelenti, hogy esetünkben a Cegléd környéki teszt-területen a Delaunay-háromszögeléssel kedvezőbb interpolációs geometriát sikerült kialakítanunk, mint manuálisan.

Ebből azonban még általánosan nem következtethetünk arra, hogy a Delaunay-háromszögeléssel minden esetben kialakítható az optimális interpolációs geometria, ennek igazolásához kevésnek tűnik a rendelkezésre álló három ellenőrző pont. Ugyanakkor az is igaz, hogy ez tükrözi az általános magyarországi viszonyokat, ennél nagyobb pontsűrűségben egyelőre sehol nem állnak rendelkezésre függővonal-elhajlás adatok. Ennek vizsgálatára további számítások szükségesek, az összehasonlító vizsgálatokat érdemes más területen, más elrendezésű Eötvös-inga mérési állomások esetén is elvégezni.

Végeztünk kísérleti számításokat szintetikus adatok felhasználásával is, amelyben megfelelő mennyiségű pontot biztosítottunk az ellenőrzésre. Más irányú kutatásaink mérési anyagából rendelkezésünkre állt a budapesti Mátyás-hegy területének részletes topográfiai térképe és ismertük a barlangüregek által okozott tömeghiányok gravitációs hatását is (Ulmann 2009), így erre a modellre ki tudtuk számítani mind a nehézségi erő gradienseit mind a függővonal-elhajlás összetevők értékeit. A szükséges gradiensek és a függővonal-elhajlás összetevők számítását a PolyGrav programmal hajtottuk végre (Tóth és Égető 2010). Az így meghatározott mintegy 113 szintetikus adattal több különböző kombinációban is elvégeztük a függővonal-elhajlás interpolációt, és az ellenőrző pontokban minden esetben tized másodperc körüli egyezéseket kaptunk a manuálisan, és a Delaunay-háromszögeléssel kialakított hálózati geometria esetére. Ez is az automatizált módszerrel kialakított interpolációs geometria használhatóságát igazolta, mivel számottevő különbség nem adódott a számítások között.

Hátra van még annak igazolása, hogy a Delaunay-háromszögeléssel minden esetben kialakítható olyan optimális hálózati geometria, amelyre a legjobb függővonal-elhajlás értékek interpolálhatók. Ennek igazolásához a Cegléd környéki teszt-területen ellenőrzés céljára még számos pontban mérésekkel kellene meghatározzuk további függővonal-elhajlás értékeket. Erre előre láthatóan rövid időn belül jó lehetőség fog kínálkozni.

5 Összefoglalás

Az Eötvös-inga mérések alapján végezhető függővonal-elhajlás interpoláció eddigi legmunkaigényesebb fázisa és egyben a leggyengébb láncszeme az interpolációs hálózat optimális geometriájának kialakítása volt. Ezt a lépést sikerült automatizálnunk a Delaunay-háromszögelés alapelveinek felhasználásával és speciális finomításával. További részletes vizsgálatokat tervezünk arra vonatkozóan, hogy a hálózat geometriájának kialakításakor figyelembe véve az Eötvös-inga mérések területi eloszlását, választási lehetőség esetén azokat a háromszögoldalakat részesítsük előnyben, amelyek mentén jobban biztosított a W_{Δ} és a W_{xy} görbületi gradiensek két pont közötti lineáris változása. Ehhez már ki kell lépni a MATLAB környezetéből és saját fejlesztésű szoftver megírására lesz szükség.

Köszönetnyilvánítás. Kutatásaink a 76231 sz. OTKA támogatásával folynak. Az Eötvös-inga adatok az ELGI (ma már MFGI) 1949. és 1950. évi méréseiből származnak. A munka szakmai tartalma kapcsolódik a „Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben” című projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását a TÁMOP-4.2.2.B-10/1–2010-0009 program támogatja. Kapcsolódik továbbá a „Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen” című

projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az UMFT TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR–2010-0002 program támogatja.

Hivatkozások

- Biró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy** (2013): A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest. Egyetemi tankönyv és kézikönyv.
- Bowyer A** (1981): Computing Dirichlet Tessellations. *Computer Journal* 24(2), 162–166.
- Ruppert J** (1995): A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. *Journal of Algorithms* 18(3), 548-585.
- Kalmár J** (1994): A digitális terepmodell kutatások új eredményei, kandidátusi értekezés, MTA GGKI, Sopron.
- Kalmár J** (2000): Gömbi trianguláció globális GPS hálózatok lefedésére, *Geomatikai Közlemények* III, 89-93.
- Lee DT, Schachter BJ** (1980): Two Algorithms for Constructing a Delaunay Triangulation. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 9(3), 219-242
- Nagy D, Franke R, Battha L, Kalmár J, Papp G, Závoti J** (1999): Comparison of various gridding methods, *Acta Geod. et Geoph.* 34, 1-2, 41-57.
- Shewchuk JR** (1997): Delaunay refinement mesh generation. PhD School of Computer Science, Computer Science Department, Carnegie Mellon University
- Tóth Gy, Égető Cs** (2010): A Mátyáshegyi Gravitációs és Geodinamikai Observatórium átfogó gravitációs modellezése. *Geomatikai Közlemények*, XIII/2, 113-122.
- Ulmann Z** (2009): Gravitációs tömeghatás számítása a Mátyás-hegyi barlang környezetében, XXIX. OTDK Műszaki Szekció Tanulmányai, pp. 45-49.
- Völgyesi L** (1993): Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Gravity Gradients. *Periodica Polytechnica C. E.*, 37(2), 137-166.
- Völgyesi L** (1995): Test Interpolation of Deflection of the Vertical in Hungary Based on Gravity Gradients. *Periodica Polytechnica C.E.*, 39(1), 37-75.
- Völgyesi L** (2012): Az Eötvös-inga mérések alkalmazása és jelentősége a geodéziában. *Geomatikai Közlemények*, XV, 9-26.