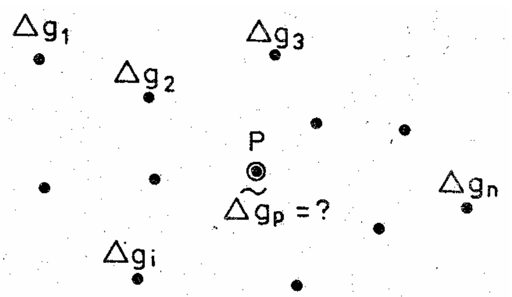
GEOFIZIKA / 4.

GRAVITÁCIÓS ANOMÁLIÁK PREDIKCIÓJA, ANALITIKAI FOLYTATÁSOK MÓDSZERE, GRAVITÁCIÓS ANOMÁLIATEREK SZŰRÉSE

A gravitációs anomáliák predikciója

Különböző feladatok megoldása során - elsősorban a geodéziai gyakorlatban - többször előfordul, hogy olyan helyeken is kellenek gravitációs rendellenességek, ahol valójában nem végeztünk méréseket. Ezeken a helyeken a szomszédos pontok ismert értékei alapján interpolációval, vagy extrapolációval (közös elnevezéssel: predikcióval) állapíthatjuk meg az anomáliák legvalószínűbb értékét.



1 ábra. Anomáliák predikciója

A gravitációs anomáliák predikciója során az a célunk, hogy az *1 ábrán* látható ismert $\Delta g_1, \Delta g_2, ..., \Delta g_n$ gravitációs anomáliák felhasználásával meghatározzuk az adott területen, vagy ennek közelében fekvő P pontban az ismeretlen $\Delta\tilde{g}_P$ anomália-értéket. Matematikailag megfogalmazva: keressük azt az f függvényt, amellyel $\Delta\tilde{g}_P$ a

$$\Delta\tilde{g}_P = f(\Delta g_1, \Delta g_2, ..., \Delta g_n)$$

formában kifejezhető.

Általában a legegyszerűbb lineáris függvénykapcsolatot írjuk fel:

$$\Delta\tilde{g}_P = a_1\Delta g_1 + a_2\Delta g_2 + ... + a_n\Delta g_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\Delta g_i \tag{1}$$

ahol a_i csak a P és a P_i pontok relatív helyzetének függvénye. Az a_i együtthatók megválasztásától függően különböző interpolációs és extrapolációs módszerek ismeretesek.

A két lehető legegyszerűbb módszer: a *zérus-anomália* és az ún. *reprezentatív érték* megadása.

Nagyon ritka hálózatok esetén (pl. a tengereken) az ismeretlen pontokon zérus anomáliákat feltételezünk, azaz:

$$\Delta\tilde{g}_P = 0$$

tehát ennek megfelelően :

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0 \quad .$$

Ezt főként izosztatikus rendellenességekre alkalmazzuk, mivel izosztatikus egyensúly esetén ez egyébként is zérus, vagy ehhez közeli érték.

Igen egyszerű és bizonyos céloknak jól megfelelő az ún. reprezentatív érték. Eszerint a ritka (általában 10 *km*-nél kisebb pontsűrűségű) hálózatok esetén az adott területre leginkább jellemző Δg_i értéket tekintjük a P pont ismeretlen anomália értékének:

$$\Delta\tilde{g}_P = \Delta g_i$$

Ekkor az (1) szerint

$$a_i = 1$$

és

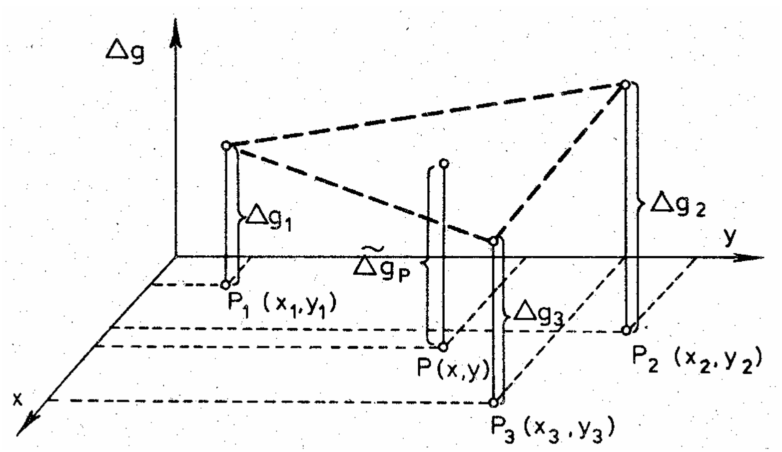
$$a_1 = a_2 = ... = a_{i-1} = a_{i+1} = ... = a_n = 0$$

Nagyobb pontsűrűségű hálózatok területén *geometriai interpolációval* jutunk egyszerűen eredményre. A módszer lényegét a 2. *ábra* szemlélteti. A P_1, P_2 és a P_3 pontban ismert Δg_1, Δg_2, Δg_3 érték alapján a P pontban:

$$\Delta\tilde{g}_P = a_1\Delta g_1 + a_2\Delta g_2 + a_3\Delta g_3$$

ahol:

$$a_1 = a_1(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$
$$a_2 = a_2(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$
$$a_3 = a_3(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$



2. ábra. A geometriai interpoláció

Ennél lényegesen megbízhatóbb megoldást szolgáltat a *legkisebb négyzetek módszere szerinti predikció*.

Jelölje

$$\varDelta\tilde{g}_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \varDelta g_i$$

az (1) lineáris predikcióval meghatározott anomáliaértékeket és legyen $\varDelta g_P$ a P pontban a valóságos anomáliaérték. Ekkor a lineáris predikció hibája:

$$\varepsilon_{\mathrm{P}} = \varDelta g_P - \varDelta\tilde{g}_P = \varDelta g_P - \sum_{i=1}^{n} a_i \varDelta g_i \tag{2}$$

varianciája pedig (a predikció középhibájának négyzete):

$$\mathrm{var}\{\varepsilon_P\} = m_P^2 = M\{\varepsilon_P^2\}$$

A feladat azon $a_1, a_2, ..., a_n$ együtthatók meghatározása, amelyekkel számított $\varDelta\tilde{g}_P$ -re a

$$\mathrm{var}\{\varepsilon_P\} = \min .$$

feltétel teljesül.

A legkisebb négyzetek módszere szerinti predikcióval a megoldása:

$$\varDelta\tilde{g}_P = \begin{bmatrix} C_{P1} & C_{P2} & ... & C_{Pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & ... & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & ... & C_{2n} \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ C_{n1} & C_{n2} & ... & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varDelta g_1 \\ \varDelta g_2 \\ ..... \\ \varDelta g_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

vagy rövidebben:

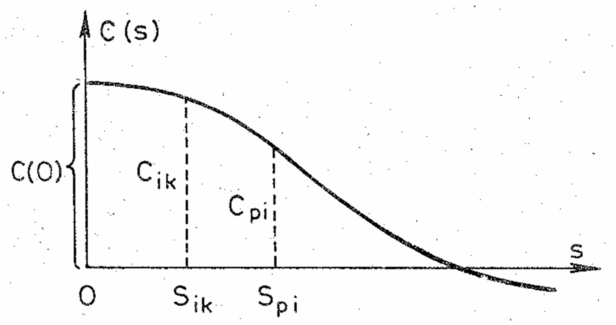
$$\varDelta\tilde{g}_P = \underset{(1,n)}{\mathbf{c}^*} \; \underset{(n,n)}{\mathbf{C}^{-1}} \; \underset{(n,1)}{\varDelta\mathbf{g}}$$

ahol $\mathbf{c}^*$ az új P pont és a mért pontok közötti kovariancia-értékeket tartalmazó $\mathbf{c}$ vektor transzponáltja, $\mathbf{C}^{-1}$ a mért pontok $\mathbf{C}$ variancia-kovariancia-mátrixának inverze és $\varDelta\mathbf{g}$ a mérésekből levezetett ismert anomáliaértékeket tartalmazó vektor.

Az (1) és a (3) összehasonlításával a legkisebb négyzetek módszere szerinti predikció esetén az a_i együtthatók:

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} c_{Pk} C_{ki}^{-1}$$

ahol C_{ki}^{-1} a **C** mátrix inverzének elemeit jelöli.



3. ábra. Jellegzetes kovariancia-függvény

Az egyetlen problémát a **c** kovariancia-vektor és a **C** variancia-kovariancia függvényeknek a meghatározása okozza. Ezeket úgy célszerű megválasztani, hogy a pontok közötti távolság növekedésével a kovariancia-értékek zérushoz tartsanak, de esetenként az egyes mért pontok között megfelelő szelekciót (súlyozást) is lehetővé tegyenek. A *3. ábrán* olyan tipikus kovariancia-függvényt láthatunk, amely értéke kizárólag a pontok egymástól mért s távolságától függ. Igen kicsi s távolságokon belül a g értékek csaknem egyenlők egymással (a varianciák közel egyenlők a kovarianciákkal), tehát a Δg értékek között igen erős a korreláció. Az s távolság növekedésével a *C(s)* kovariancia-függvény értéke csökken, mivel a Δg értékek között egyre gyengébb a kapcsolat. Igen nagy távolságok esetén a kovarianciák nagyon kicsik, de nem feltétlenül zérusok, mivel a gravitációs rendellenességeket nem csak a helyi tömeginhomogenitások, hanem nagy területekre kiterjedő regionális hatások is befolyásolják.

Az analitikai folytatások módszere

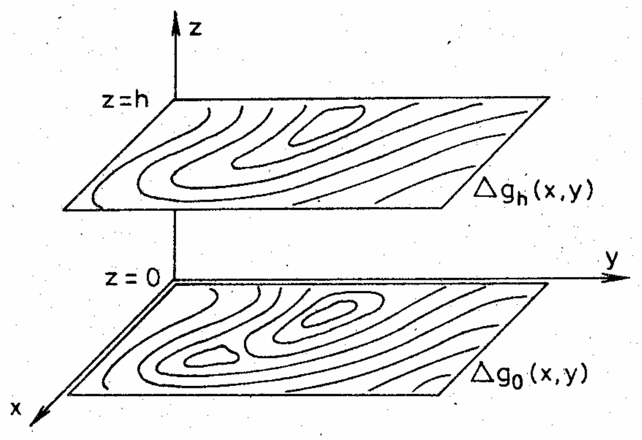
Az analitikai folytatások módszerének az a lényege, hogy tetszőleges (pl. gravitációs) anomáliatereket az adott észlelési síkról átvisszük (áttranszformáljuk) valamely fölötte, vagy alatta levő síkra. Az előbbi az analitikai felfelé folytatás, az utóbbi az analitikai lefelé folytatás esete.

Az utóbbi időkben elsősorban a gravitációs anomáliatér analitikai lefelé folytatásának növekedett meg a jelentősége, mivel a mérési technika rohamos fejlődésével egyre pontosabbak és egyszerűbbek a légi és az űrbeli gravitációs mérések és ennek megfelelően egyre nagyobb mennyiségű légi mérésből származó Δg rendellenességet kell átszámítani a földfelszínre, vagy a tengerszintre.

Az analitikai lefelé és felfelé folytatás esete közül az *analitikai felfelé folytatás* oldható meg egyszerűbben. Ha adott a 4. *ábrán* látható $z = 0$ síkon a $\Delta g_0(x, y) = \Delta g(x, y, 0)$ anomáliatér, akkor *h* magasságban a $z = h$ síkon a $\Delta g_h(x, y) = \Delta g(x, y, h)$ anomáliatér a

$$\Delta g_h(x,y)=\frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta g_0(x',y')}{\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2+h^2\right]^{3/2}}dx'dy' \tag{4}$$

transzformációval határozható meg. Az analitikai felfelé folytatás tehát úgy végezhető el, hogy a (4) integrált valamilyen numerikus integrálási módszerrel kiértékeljük.



4. ábra. Az analitikai folytatások elve

Az *analitikai lefelé folytatás* az előbbi művelet inverze. Ekkor a $z=h$ síkon a $\Delta g_h(x,y)$ anomáliatér adott, és alatta h mélységben a $z=0$ síkon levő $\Delta g_0(x,y)$ anomáliateret kell meghatározni. Ebben az esetben a (4) integrálegyenletet kell megoldani $\Delta g_0(x,y)$-ra, amely legegyszerűbben kétváltozós Fourier-transzformáció alkalmazásával valósítható meg.

A gravitációs anomáliaterek szűrése

A mérési eredmények alapján szerkesztett gravitációs izoanomália térképek együttesen tartalmazzák a nagy kiterjedésű (hosszú hullámhosszúságú) *regionális anomáliákat* és a kis területekre kiterjedő (rövid hullámhosszú) *helyi anomáliákat.*

Bizonyos esetekben az anomáliatér helyi hatásoktól mentes összetevőjére: a regionális térre vagyunk kíváncsiak; más esetekben viszont (pl. nyersanyagkutatások céljára) éppen a kisebb helyi szerkezetek hatását tükröző helyi rendellenességek ismerete, szükséges. Az előbbi esetben a helyi hatásokat tükröző lokális anomáliateret kell kiszűrni; az utóbbi esetben viszont a teljes térből a regionális összetevőt kell eltávolítani, hogy az így keletkező ún. reziduális (maradék) tér már csak a helyi, lokális hatásokat tartalmazza.

Az anomáliaterek regionális és reziduális részekre történő szétválasztása az alaptér megfelelő szűrésével lehetséges. A szűrés a

$$\Delta g_{sz}(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}s(u,v)\Delta g(x_0-u,y_0-v)\,dudv \tag{5}$$

művelettel valósítható meg, – ahol *s(u,v)* a művelet súlyfüggvénye. Az *s(u,v)* súlyfüggvény Fourier-transzformáltja az S átviteli függvényt adja. Az átviteli függvény megfelelő választásával az anomáliatér bármely frekvenciájú összetevője kiszűrhető. A különböző felülvágó szűrőket megvalósító átviteli függvényeket az anomáliatér simítására, azaz a regionális tér meghatározására használjuk; ugyanakkor az alulvágó szűrőkkel a nagyfrekvenciás összetevők, tehát a térben gyorsan változó lokális anomáliák emelhetők ki.

A gyakorlatban a nehézségi anomáliaterek szűrését számítógépekkel végezzük. Az (5) megfelelő átalakításával, *kétváltozós digitális szűréssel* tetszőleges t rácstávolságú négyzethálózat rácspontjaiban adott *Δg(x,y)* anomáliatér esetén, a tér valamely (x_0, y_0) pontjában a szűrt gravitációs anomália értéke:

$$\Delta g_{sz}(x_0, y_0) = \sum_n \sum_m c_{nm} \Delta g(x_0 + nt, y_0 + mt)$$

ahol a c_{nm} együtthatók az (5) összefüggésben szereplő *s(u,v)* súlyfüggvénynek megfelelő súlymátrix (szűrőmátrix) elemei. A digitális szűréshez az anomáliatérképeket digitalizálni kell, azaz a térképeket digitális adatrendszerré kell átalakítani. Ez a gyakorlatban pl. úgy történik, hogy az adott anomáliatérképre k ponttávolságú négyzethálózatot helyezünk és a rácspontokban kiolvassuk az anomáliaértékeket.