7. GRAVITÁCIÓS ALAPFOGALMAK

A földi nehézségi erőtérnek alapvetően fontos szerepe van a geodéziában és a geofizikában. A geofizikában a Föld szerkezetének tanulmányozásában és különféle ásványi nyersanyagok kutatásában van jelentősége; különösen fontos szerepe van azonban a geodéziában, ahol egyrészt a Földünk elméleti alakjának, a geoidnak a fogalmát a nehézségi erőtér segítségével definiáljuk, másrészt a geodéziai méréseinket is ehhez a fogalomhoz kapcsoljuk, mivel a helymeghatározó mérések során a műszereinket minden esetben a helyi függőlegeshez, azaz a nehézségi erő vektorának irányához állítjuk be.

A nehézségi erőtér leírása

A földi nehézségi erőt általában a két legjelentősebb összetevő: a Föld tömegének Newton-féle tömegvonzásából származó erő és a Föld tengelykörüli forgásából keletkező centrifugális erő eredőjeként értelmezzük. Emiatt élesen meg kell különböztetni a *tömegvonzási, vagy gravitációs erő* és a *nehézségi erő* fogalmát – ugyanis a gravitációs erő a nehézségi erőnek csupán az egyik összetevője. Szigorú értelemben azonban a nehézségi erő nem csak a Föld tömegvonzása és a tengelykörüli forgásból származó centrifugális erő eredője, hanem ehhez hozzájön a Földön kívüli égitestek (elsősorban a Hold és a Nap tömege) vonzó hatásának, valamint a Föld és a Hold, illetve a Föld és a Nap közös tömegközéppontja körüli keringésből származó centrifugális erők eredője, amelyet *árapálykeltő erőnek* nevezünk.

Végül is tehát a Föld nehézségi erőterét két különböző típusú erő: a Newton-féle általános *tömegvonzási erő* és a forgási illetve a keringési *centrifugális erő* alakítja ki.

A Newton-féle általános tömegvonzás törvénye értelmében a világegyetem minden anyagi pontja az anyagi minőségtől függetlenül

$$\mathbf{E} = k \frac{M}{\ell^2} \frac{\vec{\ell}}{\ell}$$

gravitációs erőtér forrása – ahol M az erőteret keltő anyagi pont tömege, ℓ az M tömegponttól mért távolság, k pedig a gravitációs állandó, melynek SAGITOV és munkatársai által a legújabban meghatározott értéke:

$$k = (6.6745 \pm 0.0008) \cdot 10^{-11} Nm^2 / kg \ .$$

A mágneses erőtérhez hasonló módon a vektoriális megadási mód körülményessége itt is megkerülhető, ha a teret egyetlen skalár függvénnyel: a potenciállal írjuk le [96]. Az M tömegpont vonzási potenciálja a tömegponttól ℓ távolságban

$$V = k \frac{M}{\ell} \tag{1}$$

amelynek negatív gradiense a gravitációs térerősség:

$$\mathbf{E} = -\vec{\mathrm{grad}} V \tag{2}$$

Ebben az $\vec{E}$ erőtérben bármely m tömegre az erőhatás:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}m = k\frac{Mm}{\ell^2}\frac{\vec{\ell}}{\ell} \tag{3}$$

Ugyanakkor a tengelykörüli forgás következtében az m tömegű testre

$$\mathbf{F_F} = m\omega^2\mathbf{p} \tag{4}$$

forgási centrifugális erő is hat; ahol $\mathbf{p}$ az m tömegpontnak a forgástengelytől mért távolsága, w pedig a forgási szögsebesség (a Föld esetében $\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} s^{-1}$).

Így végül is a Föld valamely pontjában az m tömegű testre ható $\mathbf{G}$ nehézségi erő (azaz a test súlya):

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \mathbf{F_F} + \mathbf{F_A} \tag{5}$$

ahol $\mathbf{F}$ az m tömegre ható Newton-féle tömegvonzás, $\mathbf{F_F}$ a forgási centrifugális erő és $\mathbf{F_A}$ a Földön kívüli égitestektől származó ún. árapálykeltő erő – mellyel a későbbiekben fogunk részletesen foglalkozni.

A nehézségi erő W potenciálját az előbbi három erőhatás potenciáljának összegeként számíthatjuk:

$$W = V + V_F + V_A = k\int\limits_{Föld}\frac{dm}{\ell} + \frac{1}{2}\omega^2 p^2 + V_A \tag{6}$$

ahol az integrálást a Föld teljes tömegére kell elvégezni. Az azonos W potenciálértékű pontok által alkotott és a

$$W(x, y, z) = áll.$$

egyenlettel definiált felületek a nehézségi erőtér potenciáljának szintfelületei.

Tekintettel arra, hogy az (5)-ben szereplő $\mathbf{F_A}$ árapálykeltő erő, illetve ennek a (6)-ban szereplő V_A potenciálja a másik két taghoz viszonyítva kicsi, ráadásul az időben gyorsan változik, ezért bizonyos esetekben tudatosan elhagyjuk annak érdekében, hogy ne egy időben gyorsan változó erőteret kelljen vizsgálnunk. A nehézségi gyorsulás mérések feldolgozása során az első lépés a luniszoláris hatás, azaz az árapálykeltő erők hatásának eltávolítása. A nehézségi erőtérnek az árapálykeltő erők elhanyagolásával adódó potenciálját sem a hazai, sem a nemzetközi szakirodalomban nem jelölik külön, így a (6)-tal azonos módon erre is a W jelölést alkalmazzuk :

$$W \approx V + V_F \ . \tag{7}$$

Gyakorlatilag a Föld elméleti alakját: a *geoidot* éppen ezen potenciál szintfelületeként határozzuk meg. Ha nem így járnánk el, hanem a geoidot a (6) szerint definiálnánk, akkor a geoid tulajdonképpen az árapálykeltő erők periódusával állandóan "lüktető" felület lenne; de ezt az időben gyorsan változó tagot leválasztjuk róla és csak a közel állandónak tekinthető részt vizsgáljuk. Ez – amint a későbbiekben látni fogjuk – a geoid meghatározásában néhány *dm*-es tudatos elhanyagolást jelent. Általában a geofizikában is a (7) közelítést alkalmazzuk, mivel a felszín alatti sűrűséginhomogenitások kutatását az időben gyorsan változó összetevő figyelembevétele zavarná. Az árapálykeltő erőkkel azonban mégis foglalkoznunk kell, egyrészt azért, hogy a különböző geofizikai és geodéziai hatásait pontosan megismerjük, másrészt azért, hogy a nehézségi gyorsulás méréseket megfelelőképpen fel tudjuk dolgozni.

A (6) vagy a (7) első tagjának kiszámításához ismernünk kellene a Föld minden térfogatelemének sűrűségét. Sajnos ehhez nem ismerjük kellő pontossággal sem a Föld belső tömegeloszlását, sem az integrálási tartományt határoló felületet (hiszen éppen ezt akarjuk meghatározni) – ezért a (6) első tagját ilyen formában nem tudjuk kiszámítani.

Felírhatjuk viszont a Föld külső terében a tömegvonzási erőtér potenciáljára a Laplace-egyenletet:

$$\Delta V = 0$$

amelynek megfelelően választott gömbi koordináta-rendszerben a megoldása:

$$V = \frac{kM_F}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\psi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n \left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\sin\psi)\right] \tag{8}$$

ahol kM_F a geocentrikus gravitációs állandó, a a földi ellipszoid fél nagytengelyének hossza r, y, ℓ a vizsgált pont koordinátái, J_n a zonális gömbfüggvény-együtthatók (tömegfüggvények), C_{nm} és S_{nm} a tesszerális gömbfüggvény-együtthatók, $P_n(t)$ (itt: $t = \sin\psi$) a Legendre-polinomok, amelyek az ún. *Rodrigues-képlettel* állíthatók elő:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^2 - 1\right)^n \tag{9}$$

és végül $P_{nm}(t)$ az asszociált Legendre-függvények:

$$P_{nm}(t) = \left(1 - t^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t) \qquad (m \le n) \ . \tag{10}$$

A (8) első tagja homogén gömb, vagy más gömbszimmetrikus tömegeloszlású test centrális tömegvonzási erőterének potenciálját adja; a második tagja miután csak a ψ-től és r-től függ, ezért a gömbszimmetrikus részét írja le; végül a harmadik tag a potenciálfelületek forgásszimmetrikus alaktól adódó eltérését jellemzi.

A (8) gömbfüggvény-sorban szereplő J_n, C_{nm}, S_{nm} együtthatókat elsősorban mesterséges holdak mérései alapján határozhatjuk meg; jelenleg $n = 400$ fokig és $m = 400$ rendig ismerjük az együtthatók értékeit.

A W potenciál negatív gradiense a térerősséget adja, azonban a Föld $\mathbf{E} = \mathbf{G}/m$ nehézségi erőterében a $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ erőtörvény miatt *a térerősség nem más, mint a nehézségi gyorsulás*, így :

$$\mathbf{g} = -\mathrm{gr\vec{a}d}W \ . \tag{11}$$

A nehézségi gyorsulás egysége: $1\,m/s^2$. A geofizikában és a geodéziában GALILEI tiszteletére az $1\,Gal = 1\,cm/s^2$ egységet, illetve ennek ezredrészét, a $mGal$-t használják:

$$1mgal = 10^{-5}m/s^2 = 10\mu m/s^2 \ .$$

A nehézségi erőtér térbeli változása

A nehézségi erőtér a Föld körül sehol sem homogén. A tér különböző irányaiban a hosszegységre eső változást a nehézségi gyorsulásnak a megfelelő irányok szerinti első deriváltjai (vagyis az erőtér potenciáljának második deriváltjai) jellemzik.

A nehézségi erőtér W potenciáljának második deriváltjai egyetlen szimmetrikus tenzorba foglalhatók, amelyet *Eötvös-féle tenzornak* nevezünk:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Az Eötvös-féle tenzor segítségével egyszerűen meghatározhatjuk a nehézségi gyorsulás $\mathbf{dg}$ elemi megváltozását bármely tetszőleges $\mathbf{ds}$ térbeli irányban:

$$\mathbf{dg} = \mathbf{E}\,\mathbf{ds},$$

vagy térbeli derékszögű koordinátarendszerben:

$$\begin{bmatrix} dg_x \\ dg_y \\ dg_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Az Eötvös-féle tenzorban szereplő mennyiségek mértékegysége $1ms^{-2}/m{=}1s^{-2}$. Korábban ennek 10^{-9}-szeresét használták és ezt EÖTVÖS Lóránd tiszteletére 1 *Eötvös-nek* nevezték $(1E = 10^{-9}s^{-2})$.

Valamely szintfelület tetszőlegesen kiválasztott környezetében minden irányban változik, vagy változhat a nehézségi gyorsulás. A helyi vízszintes síkban tehát általában található olyan irány, amely mentén legnagyobb a változás. Ha ezen vízszintes s irány mentén képezzük a nehézségi gyorsulás differenciálhányadosát, akkor a vízszintes, *vagy nívófelületi gradienst* kapjuk. Ez vektormennyiség; iránya a legnagyobb változás vízszintes iránya. A nívófelületi gradiens a potenciállal kifejezve (ha z a függőleges irány):

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial s} = W_{zs} \quad .$$

Ennek derékszögű összetevői:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} = W_{zx}\ ; \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} = W_{zy} \quad . \tag{13}$$

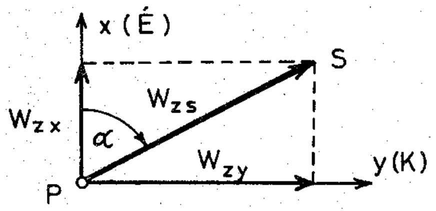
Megállapodás szerint $+x$ az északi, $+y$ a keleti irány. A vízszintes síkban a legnagyobb változás irányának α azimutja:

$$\tan\alpha = \frac{W_{zy}}{W_{zx}} \ .$$

A nívófelületi gradienst mint vektormennyiséget az *1. ábrán* látható módon ábrázoljuk.

Ha a nehézségi gyorsulást a *z* függőleges irány szerint differenciáljuk, a nehézségi gyorsulás *függőleges (vertikális) gradiensét* kapjuk :

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = W_{zz} \ . \tag{14}$$



1. ábra. A nívófelületi gradiens

A vertikális gradiens a nehézségi gyorsulásnak a függőleges irányban mért távolságegységre eső megváltozását adja.

A nehézségi erő szintfelületei alakjának a gömbi szimmetriától tapasztalható eltérését az ún. görbületi eltéréssel lehet jellemezni. A *szintfelület görbületi eltérése* – vagy EÖTVÖS elnevezésével a horizontális irányítóképesség – nem más, mint a szintfelület valamely pontjában a legnagyobb és a legkisebb görbület különbségének és az illető pontban a nehézségi gyorsulásnak a szorzata:

$$R = g\left(\frac{1}{\rho_{\min}} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right)$$

ahol $\rho_{\min}$ és $\rho_{\max}$ a főgörbületi sugarak. Levezethető, hogy ez a potenciál deriváltjaival az

$$R = \sqrt{W_{\Delta} - 4W_{xy}} \tag{15}$$

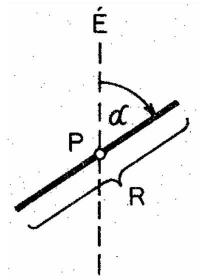
formában fejezhető ki, ahol

$$W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx} \ . \tag{16}$$

A legkisebb görbületnek az északi iránnyal bezárt azimutja:

$$\tan\alpha = -\frac{2W_{xy}}{W_{\Delta}}$$

A görbületi eltérést a *2. ábrán* látható módon úgy ábrázoljuk, hogy a szintfelület kérdéses *P* pontján át a legkisebb görbület (a legnagyobb görbületi sugár) irányában a ponthoz képest szimmetrikusan olyan egyenes vonalszakaszt húzunk, amelynek hosszúsága a görbületi eltéréssel arányos.



2. ábra. A görbületi eltérés ábrázolása

A nehézségi erőtér mérése

A nehézségi erőtér mérésével kapcsolatos mérési módszerek és mérőműszerek három csoportba sorolhatók.

Az első csoportba a nehézségi gyorsulás abszolút értékének meghatározására szolgáló mérési módszereket soroljuk. Az erre szolgáló mérési eszközök általában a különféle ingák, vagy az ejtés és a hajítás alapelvén működő műszerek.

A második csoportba a nehézségi gyorsulás két pont közötti relatív különbségének méréseit soroljuk. Az erre alkalmas mérőműszerek a különböző elven működő graviméterek és a relatív ingák.

A mérési módszerek harmadik csoportjába a nehézségi erőtér gradienseinek meghatározási módszereit soroljuk. Ezekből a mérésekből megkapjuk, hogy a különböző irányokban, egységnyi távolságon mennyivel változik meg a nehézségi gyorsulás értéke. A gradiensek meghatározására az Eötvös-ingák és az ún. gradiométerek szolgálnak.

A nehézségi erőtér mérésével kapcsolatos részletes ismeretekkel a *Gravimetria* tantárgy foglalkozik.