# 8. gyakorlat: Számpéldák a hibaterjedés témaköréből

**A gyakorlathoz szükséges felszerelés hallgatónként:**

1 db tudományos zsebszámológép

**A gyakorlat tartalma:**

A hibaterjedés általános képlete és alkalmazása egyszerűbb esetekre. Számpéldák az egyszerűbb esetekre és összetett geodéziai (geometriai) jellegű feladatokra.

**A gyakorlat előtt elolvasásra javasolt irodalom:**

Krauter: Geodézia (15-35. oldal)

**A gyakorlathoz kapcsolódó számpéldák:**

Az $L_i$ mérési eredményekből levezethető $G$ függvényérték középhibája a mérési eredményekhez tartozó $m_i$ középhibák ismeretében a következőképpen számítható ki:

$$m_G = \sqrt{g_1^2 m_1^2 + g_2^2 m_2^2 + \ldots + g_i^2 m_i^2 + \ldots + g_n^2 m_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i^2 m_i^2}$$

ahol a $g_i = \dfrac{\partial G}{\partial L_i}$, a $G$ függvény $L_i$ változó szerinti parciális deriváltja ($i$ = 1....$n$)

Amennyiben a súly ismert, akkor a következőképpen végezhetjük el a számítást:

$$\frac{1}{p_G} = g_1^2 \frac{1}{p_1} + g_2^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + g_i^2 \frac{1}{p_i} + \ldots + g_n^2 \frac{1}{p_n} = \sum_{i=1}^{n} g_i^2 \frac{1}{p_i}$$

**1. példa**

**A mérési eredmény többszörösének a középhibája:**

$G = k \cdot L_1$ ($k$ konstans)

$g_1 = k$

$m_G^2 = \sqrt{k^2 \cdot m_l^2} = k \cdot m_1$

Egy földrészlet területe T=200 □öl ± 0,5 □öl. Mekkora a földrészlet területe négyzetméterben és mennyi ennek a középhibája? (1 □öl = 3,596 650 955 m²)

$G$ = T [m²] = $k$ · T[□öl] = 3,596 650 955 · 200 = 719,330 m² ≈ 719 m²

$g_T = k \cdot m_T$ = 3,596 650 955 · 0,5 = 1,8 m²

**2. példa**

**Összeg vagy különbség középhibája:**

$G = L_1 + L_2$ vagy $L_1 - L_2$

$g_1 = 1$ $g_2 = 1$ vagy $g_2 = -1$

$m_G = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$, ha $m_1 = m_2 = m$, akkor $m_G = m\sqrt{2}$

Egy távolságot két részletben tudtunk megmérni, az alábbi középhibákkal: $t_{AB}$ = 111,23 m ± 0,01 m; $t_{BC}$ = 222,32 m ± 0,05 m. Mekkora a $t_{AC}$ távolság és ennek középhibája?

$$t_{AC} = t_{AB} + t_{BC} = 111{,}23 + 222{,}32 = 333{,}55 \text{ m}$$

$$g_1 = 1 \quad g_2 = 1$$

$$m_{t_{AC}} = \sqrt{m_{t_{AB}}^2 + m_{t_{BC}}^2} = \sqrt{0{,}01^2 + 0{,}05^2} = \pm 0{,}051 \text{ m}$$

**3. példa**

**Számtani közép középhibája azonos súlyok esetén:**

$$G = \overline{L} = \frac{L_1 + L_2 + \ldots + L_i + \ldots + L_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}$$

$$g_1 = g_2 = g_i = g_n = \frac{1}{n}$$

(Az azonos súlyok miatt: $m_1 = m_2 = m_i = m_n = m$)

$$m_G = m_{\overline{L}} = \sqrt{\frac{1}{n^2} m^2 + \frac{1}{n^2} m^2 + \ldots + \frac{1}{n^2} m^2} = \sqrt{n \left(\frac{1}{n^2} m^2\right)} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

A számtani közép súlya:

(Azonos súlyok: $p = p_1 = p_2 = \ldots = p_i = \ldots = p_n = 1$)

$$\frac{1}{p_G} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{n} \qquad (p_G = p_i = n)$$

Egy szöget ötször mértünk meg, egy mérés középhibája $m$ = ± 6". Mekkora lesz a számtani közép középhibája és súlya?

$$m_G = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{6''}{\sqrt{5}} = \pm 2{,}7''$$

$$p_G = n\, p = 5 \cdot 1 = 5 \text{ mp}^{-2}$$

**4. példa**

**Szorzat középhibája**

$$G = L_1 L_2$$

$$g_1 = L_2 \qquad g_2 = L_1$$

$$m_G = \sqrt{L_2^2\, m_1^2 + L_1^2\, m_2^2}$$

Egy téglalap alakú földrészlet területét kell meghatároznunk. A két oldalát különböző középhibával tudjuk csak megmérni:
$a$ = 165,30 m ± 0,10 m; $b$ = 11,53 m ± 0,01 m.
Mekkora a téglalap területe és annak középhibája?

$$T = a \cdot b = 165{,}30 \cdot 11{,}53 = 1905{,}9 \text{ m}^2 \approx 1906 \text{ m}^2$$

$$g_1 = b \quad g_2 = a$$

$$m_T = \sqrt{b^2 m_a^2 + a^2 m_b^2} = \sqrt{11{,}53^2 \cdot 0{,}10^2 + 165{,}30^2 \cdot 0{,}01^2} = \pm\ 2{,}02 \text{ m}^2$$

Amennyiben az *a* oldalt mértük volna pontosabbban: ± 0,01 m középhibával, a *b* oldalt pedig csak ± 0,10 m középhibával, hogyan alakulna a terület középhibája?

$$m_T = \sqrt{b^2 m_a^2 + a^2 m_b^2} = \sqrt{11{,}53^2 \cdot 0{,}10^2 + 165{,}30^2 \cdot 0{,}01^2} = \pm 16{,}57 \text{ m}^2$$

**5. példa**

**Egy háromszög területének, valamint a terület középhibájának kiszámítása:**

$a$ = 46,253 m ± 5 mm
$b$ = 53,854 m ± 5 mm
$\gamma$ = 55-19-40 ± 30".

$$G = T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = 1024{,}29 \text{ m}^2$$

$$g_a = \frac{b \cdot \sin\gamma}{2}$$

$$g_b = \frac{a \cdot \sin\gamma}{2}$$

$$g_\gamma = \frac{a \cdot b \cdot \cos\gamma}{2}$$

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{b \cdot \sin\gamma}{2}\right)^2 \cdot m_a^2 + \left(\frac{a \cdot \sin\gamma}{2}\right)^2 \cdot m_b^2 + \left(\frac{a \cdot b \cdot \cos\gamma}{2}\right)^2 \cdot m_\gamma^2} =$$

$$= \sqrt{490{,}11 \cdot 0{,}005^2 + 361{,}75 \cdot 0{,}005^5 + 501993{,}87 \cdot \left(\frac{30''}{2 \cdot 10^5}\right)^2} = \sqrt{0{,}0123 + 0{,}0090 + 0{,}0113} = \pm 0{,}18 (\text{m}^2)$$

**Figyelem:**

A $m_\gamma$ értékét át kell számítani analitikus szögegységbe, vagyis

$$m_\gamma = \frac{m_\gamma''}{\rho''} = \frac{30''}{2 \cdot 10^{5''}} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \qquad \text{(mert 1 radián = } \rho'' = 206\ 264{,}8'' \approx 2 \cdot 10^5\text{)}$$

A $m_a$ és $m_b$ középhibákat ne felejtsük el méter egységbe átváltani!

$m_a = m_b$ = 0,005 m

**6. példa**

**Egy oszlop magasságának kiszámítása trigonometriai magasságméréssel, valamint magasság középhibájának meghatározása.**

$t_v$ = 38,135 m ± 1 cm
$z$= 54-13-45 ± 20"

$$G = \; m = t_v \cdot \cot z = 38{,}135 \cdot \cot(54-13-45) = 27{,}474 \text{ m}$$

$$g_t = \cot z$$

$$g_z = -\frac{t}{\sin^2 z}$$

$$m_m = \sqrt{(\cot z)^2 \cdot m_t^2 + \left(-\frac{t}{\sin^2 z}\right)^2 \cdot m_z^2} == \sqrt{0{,}519 \cdot 0{,}01^2 + 3355{,}753 \cdot (\frac{20''}{2 \cdot 10^5})^2} = \pm 0{,}009(\text{m})$$

**Figyelem:**

A $m_\gamma$ értékét át kell számítani analitikus szögegységbe, vagyis

$$m_\gamma = \frac{m_\gamma''}{\rho''} = \frac{20''}{2 \cdot 10^{5''}} = 1 \cdot 10^{-4}$$ (mert 1 radián = $\rho''$ = 206 264,8” ≈ $2 \cdot 10^5$)

A $m_t$ középhibát ne felejtsük el méter egységbe átváltani!

$m_t$ = 0,01 m