

7. gyakorlat: Számpéldák az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése témaköréből

A gyakorlathoz szükséges felszerelés hallgatónként:

1 db tudományos zsebszámológép

A gyakorlat tartalma:

Az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése különböző, valamint egyenlő súlyú mérési eredmények esetén. A példák megoldása során lehetőleg használjuk a zsebszámológép statisztikai funkcióit.

A súly és a középhiba összefüggése:

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} = m_2^2 : m_1^2 \quad m_1 : m_2 = \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}} = \sqrt{p_2} : \sqrt{p_1}$$

Az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése:

Sorszám	A számítás lépései és jelölésük	Különböző súlyok	Azonos (egységnyi) súlyok
1.	kiegyenlített érték $\hat{L}; \bar{L}$ (azonos súlyok)	$\hat{L} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i L_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$	$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{n}$
2.	kiegyenlített érték súlya $p_L; p_L$ (azonos súlyok)	$p_L = \sum_{i=1}^n p_i$	$p_L = \sum_{i=1}^n p_i = n$
3.	javítások v_i ellenőrzés: a számítás élességén belül	$v_i = \hat{L} - L_i$ $\sum_{i=1}^n p_i v_i = 0$	$v_i = \bar{L} - L_i$ $\sum_{i=1}^n v_i = 0$
4.	súlyegység középhibája $\bar{\mu}$	$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{n-1}}$	$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$
5.	kiegyenlített érték középhibája $\bar{m}_L; \bar{m}_L$ (azonos súlyok)	$\bar{m}_L = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_L}}$	$\bar{m}_L = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_L}}$
6.	az egyes mérési eredmények középhibája \bar{m}_i	$\bar{m}_i = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_i}}$	$\bar{m}_i = \bar{\mu}$

A gyakorlat előtt elolvasásra javasolt irodalom:

Krauter: Geodézia (15-35. oldal)

A gyakorlathoz kapcsolódó számpéldák:**1. példa****A súly és a középhiba összefüggése**

$$m_1 = \pm 1,9 \text{ cm} \quad m_2 = \pm 3,3 \text{ cm}$$

$$p_1 = ? \quad p_2 = ?$$

Legyen: $p_2=1$, ugyanis $m_2 > m_1$, így p_1 egynél nagyobb szám lesz, egyszerűbb lesz a későbbi számolás.

$$p_1 : 1 = 3,3^2 : 1,9^2 = 3,02 \approx 3 \text{ cm}^{-2}, \text{ vagyis } p_1 = 3 \text{ cm}^{-2} \quad p_2 = 1 \text{ cm}^{-2}$$

2. példa

Két alappont távolságát két különböző távmérőműszerrel határoztuk meg. Az alábbi mérési eredmények, és a középhibák alapján számítsa ki a távolság legvalószínűbb értékét és annak középhibáját.

L_i [m]	m_i [mm]	L_i [mm]	p_i [mm ⁻²]	$p_i L_i$ [-]	v_i [mm]	$p_i \cdot v_i$ [mm ⁻¹]	$p_i \cdot v_i^2$ [-]
316,343	3	43	25	1075	-1,74	-43,88	75,28
316,339	3	39	25	975	+2,26	+56,62	128,22
316,348	5	48	9	432	-6,74	-60,62	408,28
316,336	5	36	9	324	+5,26	47,38	249,45
Σ			68	2806		-0,5 \approx 0	861,24

Az egyszerűbb számítás érdekében a mérési eredményekből csak a megváltozó értékeket – esetünkben a centimétereket és a millimétereket – használjuk.

Az a priori súlyegység középhiba legyen $3 \times 3 \times 5 \times 5 = 225$, mert így a súlyok egész számok lesznek.

A számítás eredményei:

- $\hat{L} = 316,300 + 0,04126 = 316,34126 \text{ m}$
- $p_{\hat{L}} = 68$
- v_i (a táblázatban), ellenőrzés: $\Sigma p_i v_i \approx 0$
- $\mu = \pm 16,94$
- $\bar{m}_{\hat{L}} = \pm 2,05 \text{ mm}$
- $\bar{m}_1 = \pm 3,39 \text{ mm} \quad \bar{m}_2 = \pm 3,39 \text{ mm} \quad \bar{m}_3 = \pm 5,65 \text{ mm} \quad \bar{m}_4 = \pm 5,65 \text{ mm}$

Láthatjuk, hogy a kiegyenlített érték középhibája kisebb lett, mint az egyes mérések középhibája.

3. példa

A mérési eredmények azonos súlyúak

L_i [° ' '']	L'_i ['']	v_i	v_i^2
25-44-15	15	-1,0	1,0
25-44-11	11	+3,0	9,0
25-44-20	20	-6,0	36,0
25-44-10	10	+4,0	16,0
Σ	56	0,0	62,0

Az egyszerűbb számítás érdekében a mérési eredményekből csak a megváltozó értékeket – esetünkben a másodperceket – használjuk.

Az számítás eredményei:

1. $\hat{L} = 25-44-00 + 14,0'' = 25-44-14$
2. $p_{\hat{L}} = 4$
3. v_i (a táblázatban), ellenőrzés: $\Sigma v_i = 0,0$
4. $\mu = \pm 4,5$
5. $\bar{m}_{\hat{L}} = \pm 2,2''$
6. $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \bar{m}_3 = \bar{m}_4 = \mu = \pm 4,5''$

Láthatjuk, hogy a kiegyenlített érték középhibája kisebb lett, mint az egyes mérések középhibája.

4. példa

Hányszor kell a szöget megmérni, ha azt akarjuk, hogy a középérték középhibája kisebb legyen $\pm 2''$ -nél?

Egy mérés középhibája: $\bar{m}_{van} = \pm 4,5''$

A középérték szükséges középhibája: $\bar{m}_{kell} = \pm 2,0''$

$$\bar{m}_{kell} = \frac{\bar{m}_{van}}{\sqrt{n}}$$

$$n = \frac{\bar{m}_{van}^2}{\bar{m}_{kell}^2} = \frac{4,5^2}{2,0^2} = 5,06$$

Vagyis 6-szor kell a szöget megmérnünk.

Minden alkalommal felfelé kell kerekíteni, mert:

$$n = 5 \text{ esetén } \bar{m}_{kell} = \frac{\bar{m}_{van}}{\sqrt{n}} = \frac{4,5}{\sqrt{5}} = 2,01 > 2,0$$

$$n = 6 \text{ esetén } \bar{m}_{kell} = \frac{\bar{m}_{van}}{\sqrt{n}} = \frac{4,5}{\sqrt{6}} = 1,84 < 2,0$$