

Földünk tengely körüli forgása nehezen átlátható, meglehetősen bonyolult folyamat. Az előző [1] cikkben áttekintettük a legfontosabb fizikai alapfogalmakat, a súlyos és az erőmentes pörgettyű precessziós és nutációs mozgását és részletesen foglalkoztunk a Föld precessziós mozgásával. Ebben a cikkben a Föld nutációs mozgásával (pólusmozgás, pólusingadozás, pólusvándorlás, szabadnutáció, kényszernutáció jelenségeivel) foglalkozunk.

Az Euler-egyenletek

Ha forgó merev testre külső erők hatnak, akkor az impulzusnyomaték megváltozása a külső erők \mathbf{M} forgatónyomatékával egyenlő, így az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forgó merev test kinetikai egyensúlyának feltétele külső (a testtel nem együttforgó) $K'(x', y', z')$ inercia-rendszerből szemlélve:

$$\frac{d'\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (1)$$

Térjünk át az 1. ábrán látható $K'(x', y', z')$ inercia-rendszerrel a merev testtel együtt forgó $K(x, y, z)$ koordináta-rendszerre. Ha a forgó K koordináta-rendszeren belül az \mathbf{N} vektor nem változna, akkor a K' inercia-rendszerből szemlélve az \mathbf{N} vektor változása csak a forgásból állna:

$$\frac{d'\mathbf{N}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}. \quad (2)$$

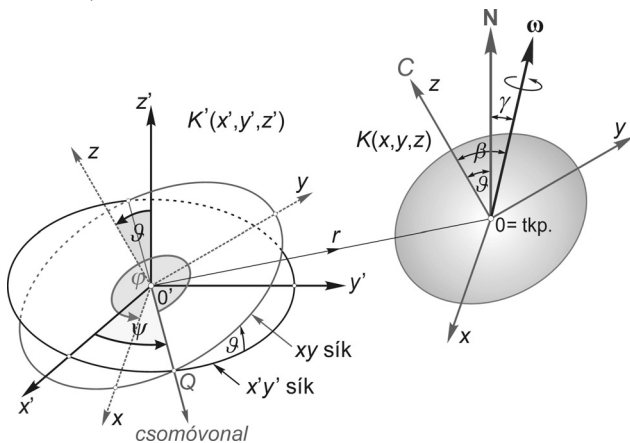
Ha \mathbf{N} a K rendszerből szemlélve is változik, akkor:

$$\frac{d'\mathbf{N}}{dt} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}. \quad (3)$$

A (3) vektor-transzformációból az (1) felhasználásával:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N} = \mathbf{M}, \quad (4)$$

ami a merev testtel együtt forgó megfigyelő számára a forgási egyensúly feltétele (az Euler-féle egyenlet vektoralakban).



3. ábra. Koordináták merev testek forgásának leírásához.

Kifejtve a (4) összefüggésben szereplő $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}$ vektoriális szorzatot az x, y, z koordináta irányokban az alábbi skalár-egyenletekre jutunk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_x}{dt} + \omega_y N_z - \omega_z N_y &= M_x \\ \frac{dN_y}{dt} + \omega_z N_x - \omega_x N_z &= M_y \\ \frac{dN_z}{dt} + \omega_x N_y - \omega_y N_x &= M_z \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Ha a K koordináta-rendszert a test tömegközéppontjában úgy vesszük fel, hogy az x, y, z tengelye egybeessen a test tehetetlenségi főirányaival, akkor a főátlón kívüli centrifugális nyomatékok zérusok, és a tehetetlenségi nyomaték tenzor a:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (6)$$

formában írható. Ekkor:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= A\omega_x \\ N_y &= B\omega_y \\ N_z &= C\omega_z \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Behelyettesítve az impulzusnyomaték (7) szerinti összetevőit az (5) egyenletekbe, a merev testek forgását leíró Euler-féle mozgásegyenleteket (az ún. pörgettyű-egyenleteket) kapjuk, a merev testtel együtt forgó K koordináta-rendszerben:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - B)\omega_y \omega_z &= M_x \\ B \frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_x \omega_z &= M_y \\ C \frac{d\omega_z}{dt} + (B - A)\omega_x \omega_y &= M_z \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

A (8) Euler-féle pörgettyű egyenletek integrálásával meghatározható a forgó testek mozgása, vagyis az $\boldsymbol{\omega}$ forgási szögsebesség-vektor összetevőinek $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ időbeli változása a testtel együtt forgó koordináta-rendszerben.

További feladat külső szemlélő számára a vizsgált forgó test térbeli helyzetének meghatározása az idő függvényében. Azaz, meg kell adni a merev testtel együtt forgó $K(x, y, z)$ koordináta-rendszer helyzetét a térben rögzített $K'(x', y', z')$ inercia-rendszerhez viszonyítva.

A K rendszer K' -höz viszonyított helyzete legegyszerűbben az 1. ábrán szemléltetett ϑ, ψ, φ Euler-féle szögekkel adható meg [2, 3]. A testtel együtt forgó K koordináta-rendszerben az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség-vektor összetevői az Euler-féle szögekkel a

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi \\ \omega_y &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \cos \varphi - \frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi \\ \omega_z &= \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

összefüggésekkel fejezhetők ki [4]. Amennyiben a (8) Euler-féle egyenletekből ismertek az $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ megoldások, akkor a (9) elsőrendű differenciálegyenletekből meghatározhatók a $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ Euler-féle szögek időbeli változásai. A ϑ , ψ , φ szögekre közvetlenül is nyerhető megoldás ha a (9) összefüggéseket a (8) Euler-féle egyenletekbe írjuk. Ekkor három másodrendű differenciálegyenlet adódik, amiből a ϑ , ψ , φ szögek közvetlenül meghatározhatók.

A Föld, mint erőmentes szimmetrikus pörgettyű

Amennyiben a (8) Euler-féle egyenleteket erőmentes szimmetrikus pörgettyűnek feltételezett merev Földre alkalmazzuk, az alábbi egyszerűsítő feltevéseket tehetjük:

1. a Föld alakváltozásra képtelen merev test, azaz eltekintünk a rugalmasságától,

2. $M_x = M_y = M_z = 0$, azaz a Földre semmiféle külső forgatónyomaték nem hat (erőmentes pörgettyű esete),

3. $A = B$, vagyis az egyenlítő síkjába eső tehetetlenségi nyomatékok megegyeznek (szimmetrikus pörgettyű esete),

4. a Földhöz rögzített és vele együtt forgó K koordináta-rendszer kezdőpontja a Föld tömegközéppontjában van ($0 \equiv tkp.$),

5. a forgástengely átmegy a tömegközépponton,

6. a Földhöz rögzített koordináta-rendszer z tengelyének iránya egybeesik a C legnagyobb tehetetlenségi nyomaték irányával ($C > A$).

Ezekkel a feltevésekkel a (8) Euler-féle mozgásegyenletek az

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - A) \omega_y \omega_z &= 0 \\ A \frac{d\omega_y}{dt} - (C - A) \omega_x \omega_z &= 0 \\ C \frac{d\omega_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

alakra egyszerűsödnek.

Mivel $C \neq 0$, a harmadik egyenlet megoldása:

$$\omega_z = \omega_{z0} = \text{áll.}, \quad (11)$$

tehát a z tengely körüli forgás szögsebessége állandó, vagyis az ω szögsebesség-vektornak a szimmetriatengelyre eső vetülete nem változik. A további megoldáshoz osszuk el az (10) első két egyenletét A -val, írjuk be ezeket a (11) megoldást, és vezessük be a

$$k = \frac{C - A}{A} \quad (12)$$

jelöléssel a *dinamikai lapultság* fogalmát. Ekkor a (10) első két egyenlete:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} + k\omega_{z0}\omega_y &= 0 \\ \frac{d\omega_y}{dt} - k\omega_{z0}\omega_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Differenciáljuk a (13) első egyenletét t szerint és helyettesítsük be az így keletkező $d\omega_y/dt$ differenciálhányados kifejezését a (13) második egyenletébe. A rendezés után:

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2} + (k\omega_{z0})^2 \omega_x = 0 \quad (14)$$

amely másodrendű differenciálegyenletnek az $\omega_x = 0$ triviális megoldása mellett az

$$\omega_x = m \cos[(k\omega_{z0})t + \tau] \quad (15)$$

is megoldása; melyben m és τ integrálási állandók (a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletének megoldásához hasonlóan m a legnagyobb kitérést, τ pedig a kezdőfázist jelöli).

Hasonlóképpen kapjuk meg az ω_y értékét:

$$\omega_y = m \sin[(k\omega_{z0})t + \tau]. \quad (16)$$

Legyenek a $t=0$ időpontban $\omega_x = m$ és $\omega_y = 0$ kezdeti feltételek (vagyis a kezdő időpontnak azt választjuk, amikor az ω vektor éppen az xz síkban fekszik). Ekkor a (15) és a (16) szerint $\tau=0$.

Bevezetve az

$$\alpha = (k\omega_{z0})t \quad (17)$$

jelölést, a (11), (15) és a (16) alapján az ω forgási szögsebesség-vektor összetevői:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cos \alpha \\ m \sin \alpha \\ \omega_{z0} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A kapott eredményeket a 2. ábrán szemléltetjük. Eszerint az ω vektor összetevőiben szereplő α nem más, mint a z koordinátatengely és az ω vektor által meghatározott síknak az xz síkkal bezárt szöge. Mivel az α a (17) szerint a t időnek lineáris függvénye, ezért

$$\frac{d\alpha}{dt} = k\omega_{z0} = \frac{C - A}{A} \omega_{z0} = \text{áll.}, \quad (19)$$

tehát az ω vektor állandó szögsebességgel járja körül a test tömegéhez rögzített koordináta-rendszer z tengelyét.

Az ω (18) összetevőit megvizsgálva látható, hogy az ω vektor végpontja a z tengely körül a (19) szerint állandó szögsebességgel

$$m = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (20)$$

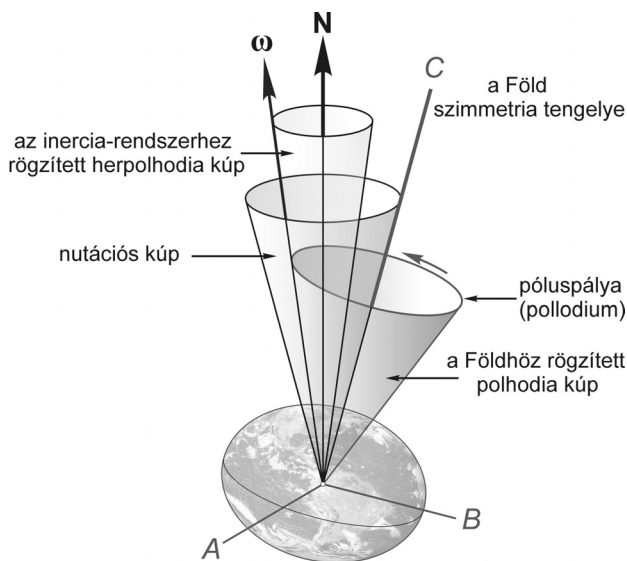
sugarú kört ír le, így maga a forgási szögsebesség-vektor, vagyis a Föld forgástengelye

$$2\beta = 2 \arctg \frac{m}{\omega_{z0}}. \quad (21)$$

nyílásszögű kórkúp palástja mentén mozog a tehetetlenségi főtengellyel azonos z koordinátatengely körül.

A (33) első két összefüggése azt mutatja, hogy külső inercia-rendszerből szemlélve az erőmentes pörgettyű C szimmetriatengelye a térben állandó helyzetű N impulzusnyomaték vektor körül $2\vartheta_0$ nyílásszögű ún. *nutációs kúp* palástja mentén állandó $m/\sin\vartheta_0$ szögsebességgel mozog körbe, miközben a harmadik egyenlet szerint ehhez még hozzájön egy további forgás a C szimmetriatengely körül. Az N vektornak a C szimmetriatengellyel bezárt ϑ_0 szögét a (33) első összefüggése, míg a C szimmetriatengelynek az ω pillanatnyi forgástengellyel bezárt β szögét pedig a (21) összefüggés adja. Ebből viszont az ω pillanatnyi forgástengelynek az N vektorral bezárt γ szöge is meghatározható. Két alapeset lehetséges: a $C > A$ esetben $\gamma = \beta - \vartheta_0$, míg a $C < A$ esetben $\gamma = \vartheta_0 - \beta$.

Összefoglalva a fentieket: a *szabadnutáció* esetén a külső térben rögzített K' inercia-rendszerben mind a Föld forgástengelyének, mind a Föld C szimmetriatengelyének az iránya folyamatosan változik, csupán az N impulzusnyomaték tengely iránya változatlan, az impulzusnyomaték megmaradási törvénye értelmében. A mozgást leegyszerűbben a 3. ábra alapján érthetjük meg – ami egyébként az erőmentes pörgettyű szabadnutációs mozgását mutatja a külső térben rögzített inercia-rendszerből szemlélve. A Föld pillanatnyi forgástengelye (a $C > A$ esetén) a kisebb nyílásszögű ún. *herpolhoida kúp* palástja mentén, a C szimmetriatengely (a Föld tehetetlenségi főiránya) pedig a nagyobb nyílásszögű ún. *nutációs kúp* palástja mentén kerüli meg az N impulzusnyomaték vektort. Eközben az ω vektor az ún. *polhodia kúp* palástja mentén a C tengely körül is vándorol. A mozgás során az ω , az N és a C mindig egy síkban van, miközben a Föld tömegéhez rögzített helyzetű polhodia kúp és az inercia-rendszerben rögzített helyzetű herpolhodia kúp palástja állandóan az ω vektor iránya mentén érintkezve csúszásmentesen gördül egymáson.

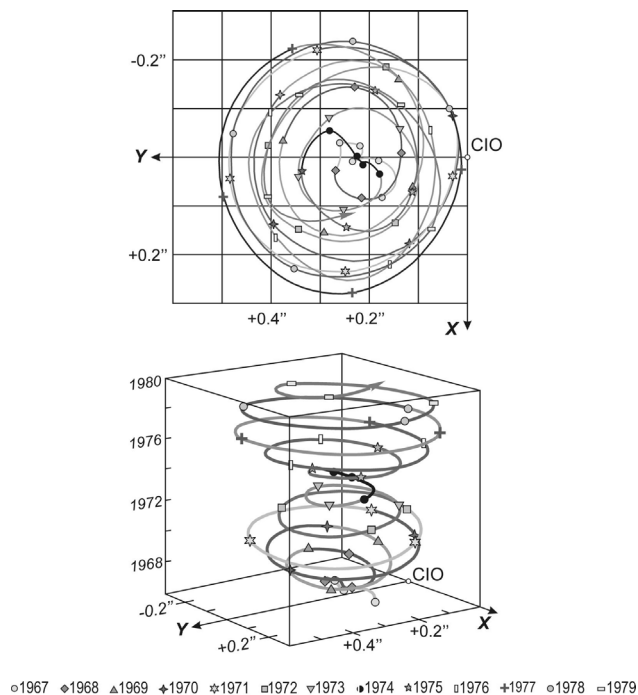


3. ábra. A Föld Euler-féle szabadnutációs mozgása külső inercia-rendszerből szemlélve.

A pólusingadozás valódi periódusa

A valódi Föld pillanatnyi forgástengelyének a főtehetlenségi irányát jól közelítő (megállapodással definiált) tengelyéhez viszonyított (mérésekkel meghatározható) mozgását *pólusingadozásnak* nevezzük. Az eddigi feltevések (pl. merev és forgásszimmetrikus Föld esete) a valóságban nem érvényesek, ezért a megfigyelt pólusingadozás jelentősen eltér az eddigi megfontolások eredményeitől.

Ha mérésekkel meghatározzuk a valódi póluspályát (a forgástengely mozgásának földfelszíni nyomvonalát) a *pollodiumot*, akkor folyamatosan a 4. ábra felső részén látható görbékhez hasonló képet kapunk. A 4. ábrán az 1967 és 1979 közötti póluspálya látható olyan koordináta-rendszerben, amelynek $+x$ tengelye a greenwichi kezdőmeridián irányába-, $+y$ tengelye pedig erre merőlegesen, nyugat felé mutat; a kezdőpontja pedig az 1900 és 1905 közötti időtartamra meghatározott közepes pólushely: a CIO (Conventional International Origin). Látható, hogy a pólus valóban periodikus mozgást végez, a pólus elmozdulása kb. $0.5'' \approx 10\text{m}$ sugarú körön belül marad, de az amplitúdó nem állandó és a periódus sem egyenlő az Euler-féle 303 napos periódussal, hanem ennél lényegesen hosszabb: 405 és 457 nap között ingadozik – átlagosan mintegy 435 nap.

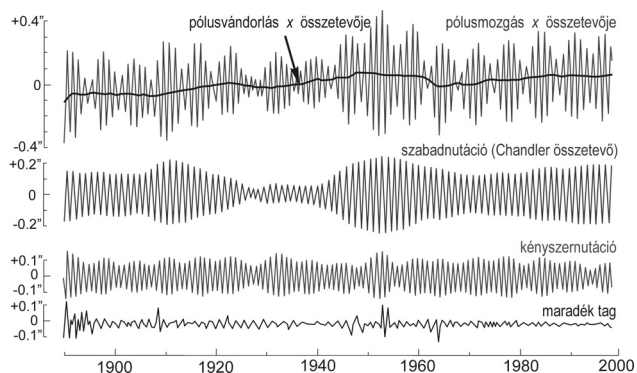


4. ábra. A póluspálya 1967-1979 között.

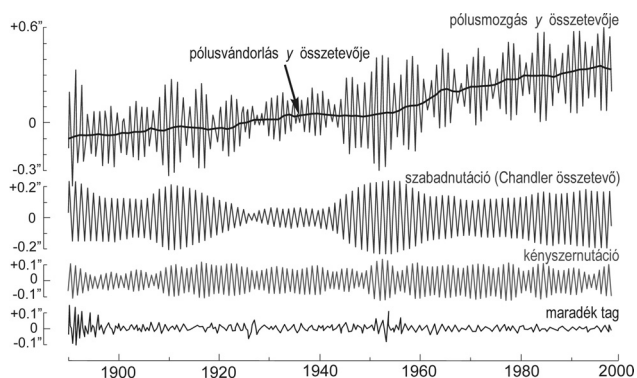
A pólusmozgás felfedezése utáni években Chandler amerikai csillagász kimutatta, hogy a pólusingadozás két domináns periódusból, egy 12 és egy 14 hónapos periódusból tevődik össze. Az utóbbit tiszteletére *Chandler-periódusnak* nevezték el. Néhány hónappal Chandler felfedezése után Newcomb már elméleti magyarázattal is szolgált: a 14 hónapos összetevő a Föld *szabadnutációja*,

míg a 12 hónapos összetevő az ún. *kényszernutáció*, mely az azonos periódusú globális meteorológiai jelenségek (tömegátrendeződések, pl. légtömegmozgások, hó- és jégtömegek olvadása és újraképződése stb.) következménye.

A 4. ábrán látható, hogy a pólus az óramutató járásával ellentétes irányban többé-kevésbé szabályos spirális pályán mozog. Ezek a spirális pályák kb. hat évenként hasonló jellegűek, a két frekvencia összeadódásából kialakuló *lebegés* következtében. Jól látható ez a lebegés a 4. ábra alsó részén, a pólusingadozás 1967 és 1979 közötti időszakra vonatkozó háromdimenziós képén. Ugyancsak ezt szemlélteti a 5. és a 6. ábra is, ahol a felső görbe a pólusmozgás x illetve y irányú összetevője, alatta pedig a szétválasztott 14 hónapos, 12 hónapos és a maradék összetevők láthatók. Megállapítható, hogy a szabadnutáció és a kényszernutáció külön-külön is meglehetősen bonyolult folyamat. A Chandler-összetevőn pl. felismerhető egy fél évszázad körüli periódus, amely több más földfizikai folyamatban is jelentkezik, pontos okát azonban egyelőre nem ismerjük.



5. ábra. A pólusmozgás x összetevője 1890-2000 között.



6. ábra. A pólusmozgás y összetevője 1890-2000 között.

Az átlagosan 427 napos Chandler-periódus és a 303 napos Euler-periódus közötti különbség oka a Föld rugalmas viselkedése. Ha ugyanis a Föld nem merev – mint ahogyan az Euler-féle pörgettyűegyenletek megoldásakor feltételeztük – akkor a forgástengely elmozdulásának megfelelően a megváltozó centrifugális erő hatására úgy deformálódik a tömege, hogy a tehetetlenségi főtengele közeledik a forgástengelyhez. (Szélső esetben, ha a Föld

folyadékszerűen viselkedne, akkor a tehetetlenségi főtengele teljes mértékben követné a forgástengely elmozdulását – tehát a periódus végtelen nagy lenne, és így pólusingadozásról nem is lehetne beszélni.)

Ennek megfelelően a T_E Euler-féle, és a T_C Chandler-periódus hányadosa kapcsolatba hozható a Föld rugalmasságát jellemző Love-féle k számmal:

$$\frac{T_E}{T_C} = 1 - k \frac{\varepsilon}{2f - \varepsilon} \quad (34)$$

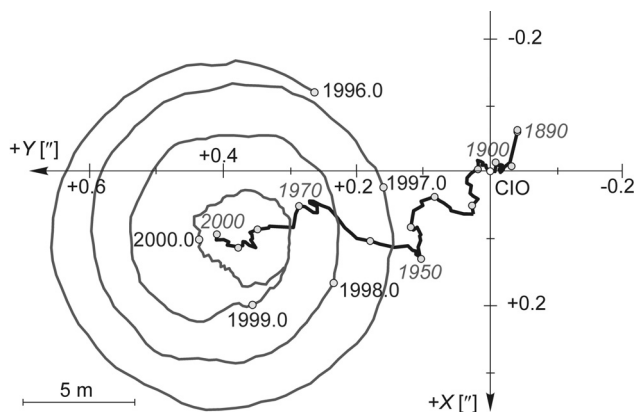
ahol f a Föld geometriai lapultsága, ε pedig a centrifugális és a nehézségi gyorsulás egyenlítői értékének hányadosa [5]. Az 1. táblázatban a (34) összefüggés alapján kiszámított, néhány szóba jöhető k értékhez tartozó Chandler-periódus hosszát tüntettük fel. A táblázatból látható, hogy a szabadnutáció Chandler-periódusa annál hosszabb, minél kevésbé merev a Föld. Az árapály jelenségek megfigyeléséből származó 0.29 és 0.31 közötti k értéknek 440 és 454 nap közötti periódus felel meg, viszont a pólusmozgás megfigyeléséből a 428-440 nap közötti Chandler-periódus tűnik a legvalószínűbbnek, amihez a táblázat adatai szerint $k = 0.27-0.29$ érték tartozik.

1 táblázat. A Föld rugalmassága és a Chandler-periódus hossza közötti összefüggés.

k	0	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32
T_C [nap]	303	421	428	434	440	447	454	461

A pólusvándorlás

Ha meghatározzuk egy-egy teljes periódushoz a 4. ábrán látható póluspályák közepes pólushelyzeteit, akkor azt tapasztaljuk, hogy ezek a közepes pólushelyek az idő függvényében folyamatosan eltolódnak. A jelenséget szekuláris pólusmozgásnak, vagy *pólusvándorlásnak* nevezzük. A 7. ábrán látható, hogy pl. az 1890 és 2000 közötti póluspálya már teljes egészében az 1900 és 1905 között meghatározott CIO középpóluson kívül halad. Az ábrán látható, hogy a közepes pólus 110 év alatt több mint 10 m távolsággal vándorolt el Kanada irányában.



7. ábra. A pólus vándorlása 1890 és 2000 között.

A megfigyelések szerint a pólusvándorlás mértéke viszonylag csekély, – évente legfeljebb néhány dm (néhány ezred szögmásodperc) nagyságrendű – a földtörténeti időskálán azonban ez az elmozdulás jelentős (több 10^9) mértékű is lehet. Ezért a pólusvándorlás problémája a geológia és a geofizika sokat tárgyalt kérdése; különösen a paleoklimatológiai és újabban néhány globális tektonikai kérdés megválaszolása szempontjából igen fontos.

A pólusmozgás geodéziai és csillagászati hatása

Kizárólag a pólusmozgás hatását figyelembe véve az ω forgási szögsebesség-vektornak az állócsillagokhoz viszonyított helyzetét gyakorlatilag állandónak tekinthetjük. Ekkor viszont állandó az égi egyenlítő síkjának helyzete is, tehát a csillagok saját mozgásától eltekintve, ezek égi egyenlítői (ekvatoriális) koordinátái az időben változatlanok.

Ugyanakkor a Föld felszínén fekvő valamennyi pont helyzete (pl. a pontok szintfelületi földrajzi koordinátái) a forgástengelyhez rögzített geodéziai koordináta-rendszerben a Föld tömegének a forgástengelyhez viszonyított elmozdulása miatt folyamatosan változik.

A pólusmozgás oka

A pörgettyűmozgás elmélete szerint a szabad tengely körül forgó merev testek helyzete akkor stabil, ha a forgás megindulásakor a test forgástengelye megegyezik a tehetetlenségi főtengelyével. Ellenkező esetben, vagyis ha a forgás nem a tehetetlenségi főtengely körül indul meg, akkor a forgó test helyzete – erőmentes térben is – állandóan változik, azaz a test szabadnutációs mozgást végez. Így ha valamely merev bolygó esetében valamikor kiala-

kult a szabadnutációs mozgás, akkor ennek fenntartásához semmiféle mechanizmusra nincs szükség.

Mivel a Föld nem merev test, rá ez a megállapítás nem érvényes. A Föld esetében a minimális mozgási energiájú állapot a tehetetlenségi főtengely körüli forgás. Ettől eltérő helyzetű forgástengely esetén olyan belső tömegátrendeződések lépnek fel, amelyek a két tengely közeledését illetve egybeesését igyekeznek előidézni. A Chandler-összetevő vizsgálata alapján az a csillapítási idő, amely alatt a mozgás amplitúdója e -ed részére csökken kb. 10-30 év közötti értékre becsülhető [2]. Az ennél jóval hosszabb idejű megfigyelések azt bizonyítják, hogy léteznie kell valamilyen gerjesztő folyamatnak, amely a pólusmozgás ismeretlen módon elnyelődő energiáját valamilyen formában pótolja.

A lehetséges disszipációs és gerjesztési folyamatok napjainkban még nagyrészt tisztázatlanok, mivel az eddig felmerült lehetőségek általában más módon nehezen ellenőrizhetők és a számítások igen bonyolultak.

A fentiek szerint nyilvánvaló, hogy a Föld nutációs mozgásának oka a Föld bonyolult belső tömegeloszlása és a tömegek állandó mozgása, áthelyeződése. A Földön kívüli tömegek eloszlásának, a különböző égitesteknek a pólusmozgásra semmilyen hatása nincs.

Irodalom

1. Völgyesi L.: A Föld precessziós mozgása *Fizikai szemle* 63 (2013) 152.
2. Völgyesi L.: A pólusmozgás fizikai alapjai. *Geomatikai Közlemények V. Sopron*, (2002) 55.
3. Völgyesi L.: A Föld precessziós mozgásának fizikai alapjai. *Geomatikai Közlemények V. Sopron*, (2002) 75.
4. Landau L.D., Lifsic E.M.: Elméleti Fizika I. *Tankönyvkiadó*, Budapest, (1974).
5. Völgyesi L.: Geofizika. *Műegyetemi Kiadó*, Budapest, (2002).