

## A PÓLUSMOZGÁS FIZIKAI ALAPJAI

Völgyesi Lajos\*

*Physical backgrounds of polar motion. Rotation of the Earth is quite involved process. Deep knowledge of certain area of physics is indispensable for its understanding and researching. It is necessary to clarify the physical elements of rotation of rigid bodies because the usage of precession and nutation's elements by experts are generally not suitable, and are confused. After the discussion some theoretical physics's concept concerning to rotational mechanics, the nutation of the Earth (polar motion, wobble, polar wandering, free nutation, forced nutation) are discussed here.*

*Földünk tengely körüli forgása nehezen átlátható, meglehetősen bonyolult folyamat. Megismeréséhez és kutatásához nélkülözhetetlen az igen alapos tájékozottság a fizika megfelelő területein. A szakemberek által a nutációval kapcsolatosan használt bizonyos fogalmak nem egységes - időnként hibás - használata, a nutáció jelenségének keveredése szükségessé teszi a fizikai alapfogalmak tisztázását. Jelen tanulmányban a forgó testek mechanikájához kapcsolódó fontosabb elméleti fizikai alapfogalmak tárgyalását követően a Föld nutációs mozgásával (pólusmozgás, pólusingadozás, pólusvándorlás, szabadnutáció, kényszernutáció jelenségeivel) foglalkozunk.*

**Kulcsszavak:** a Föld forgása, nutáció, pólusmozgás, pólusingadozás, pólusvándorlás, szabadnutáció, kényszernutáció, pörgettyű-mozgás, Euler-egyenletek

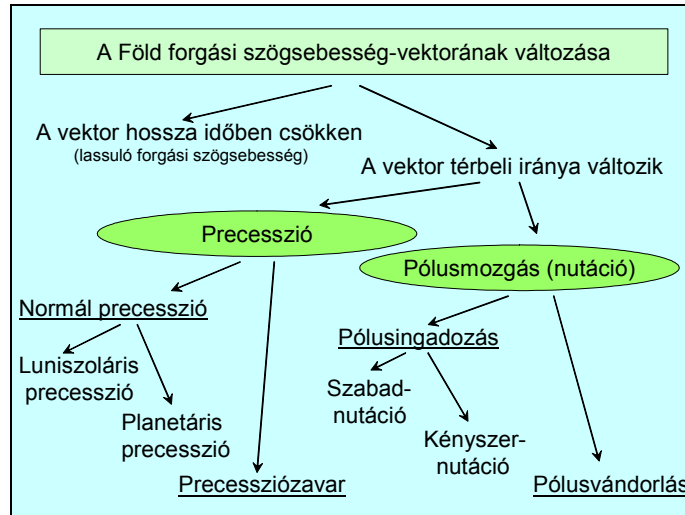
### A Föld tengelykörüli forgása

A Föld saját tengelye körüli forgását az  $\vec{\omega}$  forgási szögsebesség-vektora jellemzi, ezért a Föld forgásának leírásához ismernünk kell a szögsebesség-vektor térbeli irányát és nagyságát, valamint a forgástengely és a Föld tömegének relatív helyzetét, mint az idő függvényét.

A tengelykörüli forgás során a szögsebesség-vektor térbeli iránya és nagysága állandóan változik. A változásokat az 1. ábrán láthatjuk összefoglalva. Az  $\vec{\omega}$  szögsebesség-vektor abszolút értékének (illetve a napok hosszának) változásaival most nem foglalkoztunk; csupán megjegyezzük, hogy a forgási szögsebesség szekuláris lassulása elsősorban a Hold és a Nap által okozott ún. dagállyúrlódás eredménye, az évszakos változást felszíni (meteorológiai) tényezők, a rendszertelen változásokat pedig a Föld belső tömegátrendeződései okozzák (VÖLGYESI, 1999).

Az  $\vec{\omega}$  szögsebesség-vektor térbeli irányának változásait két csoportra oszthatjuk: a precessziós és a nutációs mozgás által okozott változásokra. A precessziós mozgást ezzel párhuzamos másik tanulmányban tárgyaljuk (VÖLGYESI, 2002), a továbbiakban a nutációs mozgással foglalkozunk.

\*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, H-1521 Budapest  
E-mail: volgyesi@sci.fgt.bme.hu



1. ábra. A Föld forgási szögsebesség-vektorának tér- és időbeli változása.

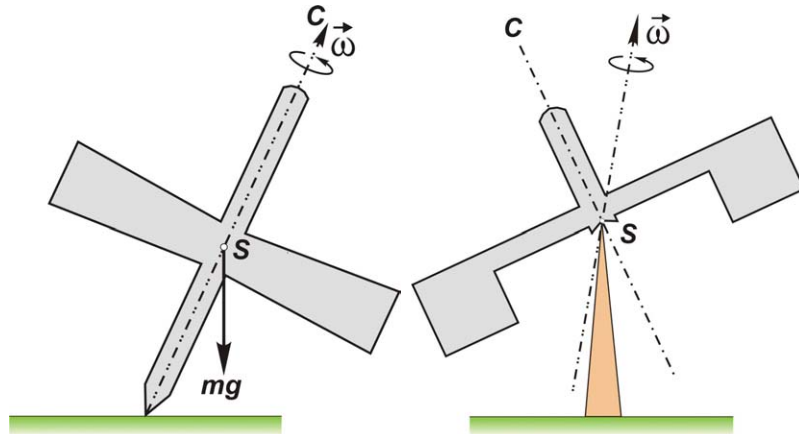
Az alábbiakban a fizikai alapfogalmak tisztázását követően megvizsgáljuk a Föld forgástengelyének a Föld tömegéhez viszonyított mozgását, a pólusmozgás, a pólusingadozás és a pólusvándorlás jelenségét és lehetséges okait.

## A pörgettyűk

Pörgettyűnek nevezzük minden olyan tetszőleges alakú és tömegeloszlású merev testet, amely egyetlen rögzített pontja körül szabadon foroghat, vagy általánosabban pörgettyűnek nevezzük a rögzített pont nélküli testet akkor is, ha a tömegközéppontja körüli forgása a tömegközéppont mozgásától függetlenül tárgyalható (BUDÓ, 1964). Két alapvetően fontos fajtája a 2. ábrán látható ún. *súlyos* és az *erőmentes* pörgettyű. A súlyos pörgettyű a súlypontjára ható forgatónyomaték hatására megfelelő  $\vec{\omega}$  forgási szögsebesség esetén *precessziós* mozgást végez, azaz a forgástengely a testtel együtt egy kúppalást mentén  $\vec{\omega}_{pr} \ll \vec{\omega}$  szögsebességgel körbe vándorol. Az erőmentes pörgettyű ettől abban különbözik, hogy a külső erőknek a súlypontjára vonatkozó forgatónyomatéka zérus (ilyen pl. a súlypontjában alátámasztott pörgettyű). Az erőmentes pörgettyű nutációs mozgást végez, amennyiben a forgástengelye és a szimmetriatengelye nem esik egybe. Ekkor a test forgástengelye folyamatosan változtatja a testhez viszonyított helyzetét, a forgástengely a test szimmetriatengelye körül kúppalást mentén körbe vándorol.

A pörgettyűk dinamikai viselkedését a tömegeloszlásuk, azaz a tehetetlenségi nyomaték tenzoruk főátlójában lévő  $A, B$  és  $C$  fő tehetetlenségi nyomatékok szabják meg. Az  $A = B = C$  (pl. homogén gömb, vagy kocka) esetén *gömbi* pörgettyűről, az  $A = B \neq C$  (pl. homogén forgásszimmetrikus testek) esetén *szimmetrikus* pörgettyűről, az általános esetben  $A \neq B \neq C$  esetén pedig *asszimmetrikus* pörgettyűről beszélünk.

A pörgettyűk mozgását legegyszerűbben az Euler-féle pörgettyű egyenletekkel írhatjuk le.



2. ábra. A súlyos és az erőmentes pörgettyű.

### Az Euler-egyenletek

Minden merev test forgása során a forgási tehetetlensége miatt igyekszik megtartani forgási állapotát, más szóval az impulzusnyomaték megmaradási törvénye értelmében bármely zárt rendszer  $\mathbf{N}$  impulzusnyomatéka állandó, tehát időbeli változása:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = 0 \quad (1)$$

Ha a forgó merev testre külső erők is hatnak, akkor az impulzusnyomaték megváltozása a külső erők  $\mathbf{M}$  forgatónyomatékával egyenlő, így az  $\vec{\omega}$  szögsebességgel forgó merev test kinetikai egyensúlyának feltétele valamely  $K(x, y, z)$  inerciarendszerről (tehát a testtel nem együttforgó koordinátarendszerről) szemlélve

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} \quad (2)$$

Térjünk ezek után át a  $K(x, y, z)$  inerciarendszerről a merev testtel együtt forgó (a 3. ábrán látható)  $K'(x', y', z')$  koordinátarendszerre. Ha a forgó  $K'$  koordinátarendszeren belül az  $\mathbf{N}$  vektor nem változna, akkor a  $K$  inerciarendszerről szemlélve az  $\mathbf{N}$  vektor változása csak a forgásból állna:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{N} \quad .$$

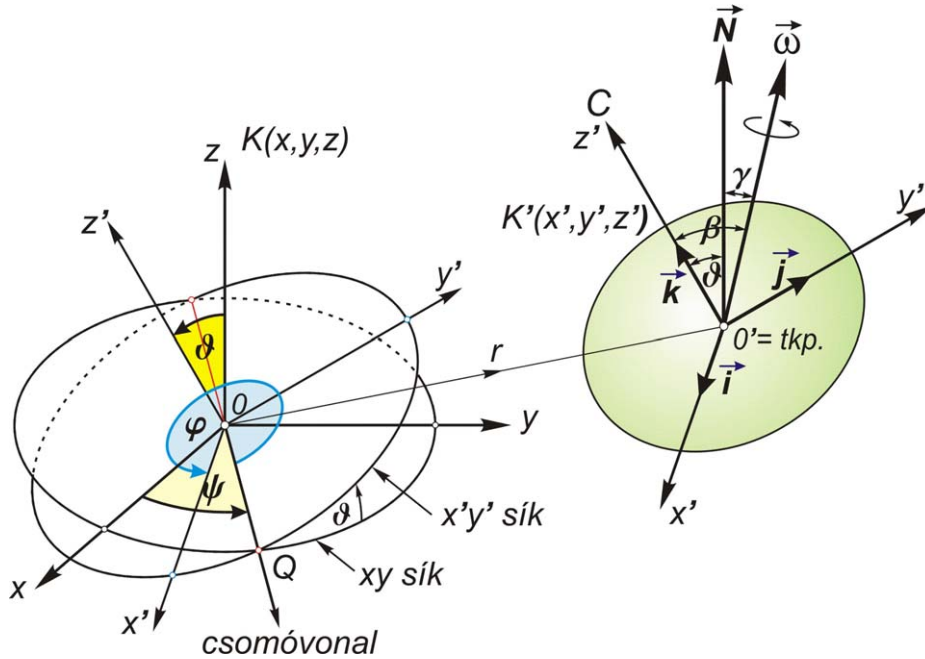
Ha  $\mathbf{N}$  a  $K'$  rendszerből szemlélve is változik, akkor:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{d'\mathbf{N}}{dt} + \bar{\omega} \times \mathbf{N} . \quad (3)$$

Ennek  $\bar{\omega}$  az egyébként bármely tetszőleges vektorra érvényes általános vektortranszformációnak  $\bar{\omega}$  a felhasználásával a (3) átírható a

$$\frac{d'\mathbf{N}}{dt} + \bar{\omega} \times \mathbf{N} = \mathbf{M} \quad (4)$$

alakra; ami a merev testtel együtt forgó megfigyelő számára a forgási egyensúly feltétele (az Euler-féle vektoregyenlet).



3. ábra. Merev testek forgásának leírásához használt koordináták.

Az Euler-féle vektoregyenlet összetevőkre bontásához először számítsuk ki a (4) összefüggésben szereplő  $\bar{\omega} \times \mathbf{N}$  vektoriális szorzatot a  $K'(x', y', z')$  koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ N_{x'} & N_{y'} & N_{z'} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(\omega_{y'}N_{z'} - \omega_{z'}N_{y'}) + \mathbf{j}(\omega_{z'}N_{x'} - \omega_{x'}N_{z'}) + \mathbf{k}(\omega_{x'}N_{y'} - \omega_{y'}N_{x'}) \end{aligned}$$

és bontsuk fel ennek segítségével a (4) vektoregyenletet az  $x', y', z'$  koordináta irányok szerinti skalár-egyenletekre:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d' N_{x'}}{dt} + \omega_{y'} N_{z'} - \omega_{z'} N_{y'} &= M_{x'} \\ \frac{d' N_{y'}}{dt} + \omega_{z'} N_{x'} - \omega_{x'} N_{z'} &= M_{y'} \\ \frac{d' N_{z'}}{dt} + \omega_{x'} N_{y'} - \omega_{y'} N_{x'} &= M_{z'} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

A következő lépésben számítsuk ki az  $\mathbf{N}$  impulzusnyomaték-vektor  $N_{x'}$ ,  $N_{y'}$  és  $N_{z'}$  összetevőit. Az impulzusnyomaték-vektort a tehetetlenségi-nyomaték tenzor és a forgási szögsebesség-vektor szorzata adja:

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} \vec{\omega} \quad (6)$$

ahol

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

a merev test tehetetlenségi-nyomaték tenzora, melynek főátlójában az adott testnek az  $x', y'$  és a  $z'$  tengelyre vonatkozó

$$I_{x'x'} = \int (y'^2 + z'^2) dm$$

$$I_{y'y'} = \int (x'^2 + z'^2) dm$$

$$I_{z'z'} = \int (x'^2 + y'^2) dm$$

tehetetlenségi nyomatékai szerepelnek, a főátlón kívüli elemek pedig az ún. centrifugális nyomatékok :

$$I_{x'y'} = I_{y'x'} = \int x' y' dm$$

$$I_{x'z'} = I_{z'x'} = \int x' z' dm$$

$$I_{y'z'} = I_{z'y'} = \int y' z' dm$$

Ha a  $K'$  koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy az  $x', y'$  és a  $z'$  tengelye egybeessen a test tehetetlenségi főirányaival, akkor ezek a centrifugális nyomatékok zérusok lesznek. Ekkor az általában szokásos jelölés szerint:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

és így:

$$\left. \begin{aligned} N_{x'} &= A\omega_{x'} \\ N_{y'} &= B\omega_{y'} \\ N_{z'} &= C\omega_{z'} \end{aligned} \right\}$$

Behelyettesítve ezeket a (5) egyenletekbe, a merev testek forgását leíró *Euler-féle mozgásegyenleteket* (az ún. pörgettyű-egyenleteket) kapjuk, a merev testtel együtt forgó  $K'$  koordinátarendszerre vonatkozóan:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d'\omega_{x'}}{dt} + (C - B)\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \\ B \frac{d'\omega_{y'}}{dt} + (A - C)\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{y'} \\ C \frac{d'\omega_{z'}}{dt} + (B - A)\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'} \end{aligned} \right\} . \quad (7)$$

Ez három elsőrendű nem lineáris differenciálegyenlet a testhez rögzített  $K'(x', y', z')$  koordinátarendszerre vonatkozó  $\omega_{x'}$ ,  $\omega_{y'}$ ,  $\omega_{z'}$  szögsebesség összetevőkre, és abban az esetben érvényes, ha a merev test tehetetlenségi főirányai egybeesnek az  $x'$ ,  $y'$  és a  $z'$  koordináta irányokkal, továbbá a koordinátarendszer kezdőpontja a test tömegközéppontjában van.

Az Euler-egyenletek integrálásával tehát meghatározható a forgó testek mozgásállapota, vagyis az  $\vec{\omega}$  forgási szögsebesség-vektor összetevői időbeli változásának  $\omega_{x'}(t)$ ,  $\omega_{y'}(t)$ ,  $\omega_{z'}(t)$  függvénye. A következő feladat az adott test térbeli *helyzetének* meghatározása az idő függvényében, azaz meg kell adni a merev testtel együtt forgó  $K'(x', y', z')$  rendszer helyzetét a térben rögzített  $K(x, y, z)$  inerciarendszerhez viszonyítva. A  $K'$  rendszer  $K$ -hoz viszonyított helyzete legegyszerűbben a  $\vartheta, \psi, \varphi$  Euler-féle szögekkel jellemezhető.

Az Euler-szögek értelmezéséhez először a 3. ábrán látható módon toljuk el önmagával párhuzamosan a merev testhez rögzített  $K'(x', y', z')$  rendszert úgy, hogy az  $O'$  kezdőpontja egybeessen a  $K(x, y, z)$  rendszer  $O$  kezdőpontjával. Így az  $xy$  és az  $x'y'$  sík az  $OQ$  csomóvonal mentén metszi egymást, amelyet úgy irányítunk, hogy a  $Q$  felől a  $z$  tengelyt a  $z'$ -be az óramutató járásával ellentétesen lehessen forgatni. Ekkor  $\vartheta$  a  $z$  és a  $z'$  tengely közötti szög (az  $xy$  és az  $x'y'$  sík hajlásszöge),  $\psi$  az  $x$  tengely

és az  $OQ$  irány közötti-,  $\varphi$  pedig az  $OQ$  és az  $x'$  közötti szög a 3. ábra jelöléseinek megfelelő értelmezésben.

A  $K'$  mozgó koordináta-rendszerben az  $\vec{\omega}$  szögsebesség-vektor összetevői az Euler-féle szögekkel az

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi \\ \omega_{y'} &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \cos \varphi - \frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi \\ \omega_{z'} &= \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

összefüggéssel fejezhetők ki (LANDAU-LIFSIC, 1974). Ezért ha a (7) Euler-féle egyenletekből ismertek a  $\omega_{x'}(t)$ ,  $\omega_{y'}(t)$ ,  $\omega_{z'}(t)$  megoldások, akkor a (8) három elsőrendű differenciálegyenletből meghatározhatók a  $\vartheta(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\varphi(t)$  Euler-féle szögek mint az idő függvényei. A (8) összefüggéseket a (7) Euler-egyenletekbe írva az így adódó három másodrendű differenciálegyenletből természetesen közvetlenül is megkaphatjuk a megoldást a  $\vartheta, \psi, \varphi$  szögekre.

### A Föld, mint erőmentes szimmetrikus pörgettyű

Amennyiben a (7) Euler-féle egyenleteket erőmentes szimmetrikus pörgettyűnek feltételezett Földre alkalmazzuk, az alábbi egyszerűsítő feltevéseket tehetjük:

1. a Föld alakváltozásra képtelen *merev* test, azaz eltekintünk a rugalmasságától,
2.  $M_{x'} = M_{y'} = M_{z'} = 0$ , azaz a Földre semmiféle külső forgatónyomaték nem hat (erőmentes pörgettyű esete),
3.  $A = B$  vagyis az egyenlítő síkjába eső tehetetlenségi nyomatékok megegyeznek (szimmetrikus pörgettyű esete),
4. helyezzük el a Földhöz rögzített és vele együtt forgó  $K'(x', y', z')$  koordináta-rendszer  $O'$  kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába ( $O \equiv tkp.$ ),
5. a forgástengely menjen át a tömegközépponton,
6. a Földhöz rögzített koordináta-rendszer  $z'$  tengelyének iránya essen egybe a legnagyobb tehetetlenségi nyomaték  $C$  irányával ( $C > A$ ).

Ekkor a (7) Euler-féle mozgásegyenletek az

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d'\omega_{x'}}{dt} + (C - A) \omega_{y'} \omega_{z'} &= 0 \\ A \frac{d'\omega_{y'}}{dt} - (C - A) \omega_{x'} \omega_{z'} &= 0 \\ C \frac{d'\omega_{z'}}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

alakra egyszerűsödnek.

Mivel  $C \neq 0$ , a harmadik egyenlet megoldása:

$$\omega_{z'} = \omega_{z'0} = \text{áll.} \quad (10)$$

tehát a  $z'$  tengely körüli forgás szögsebessége (az  $\vec{\omega}$  szögsebesség-vektornak a szimmetriatengelyre vonatkozó vetülete) állandó.

Ezt követően osszuk el a (9) első két egyenletét  $A$ -val és vezessük be a

$$k = \frac{C - A}{A}$$

jelöléssel a *dinamikai lapultság* fogalmát. Ekkor a (9) első két egyenlete:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d'\omega_{x'}}{dt} + k\omega_{z'0}\omega_{y'} &= 0 \\ \frac{d'\omega_{y'}}{dt} - k\omega_{z'0}\omega_{x'} &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (11)$$

Differenciáljuk a (11) első egyenletét  $t$  szerint és helyettesítsük be az így keletkező  $d'\omega_{y'}/dt$  differenciálhányados kifejezését a (11) második egyenletébe. A rendezés után:

$$\frac{d'^2\omega_{x'}}{dt^2} + (k\omega_{z'0})^2\omega_{x'} = 0$$

amely másodrendű differenciálegyenletnek az  $\omega_{x'} = 0$  triviális megoldása mellett az

$$\omega_{x'} = m \cos[(k\omega_{z'0})t + \tau] \quad (12)$$

is megoldása; melyben  $m$  és  $\tau$  integrálási állandók (a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletének megoldásához hasonlóan  $m$  a legnagyobb kitérést,  $\tau$  pedig a kezdőfázist jelöli).

Ha a (12) megoldást  $t$  szerint differenciáljuk és behelyettesítjük a (11) első egyenletébe, akkor az  $\omega_{y'}$  is kiszámítható:

$$\omega_{y'} = m \sin[(k\omega_{z'0})t + \tau] . \quad (13)$$

Legyenek a  $t = 0$  időpontban  $\omega_{x'} = m$  és  $\omega_{y'} = 0$  kezdeti feltételek (vagyis a kezdő időpontnak azt választjuk, amikor az  $\vec{\omega}$  vektor éppen az  $x'z'$  síkban fekszik). Ekkor a (12) és a (13) szerint  $\tau = 0$ .

Bevezetve az

$$\alpha = (k\omega_{z'0})t \quad (14)$$

jelölést, a (10), (12) és a (13) alapján az  $\vec{\omega}$  forgási szögsebesség-vektor összetevői:

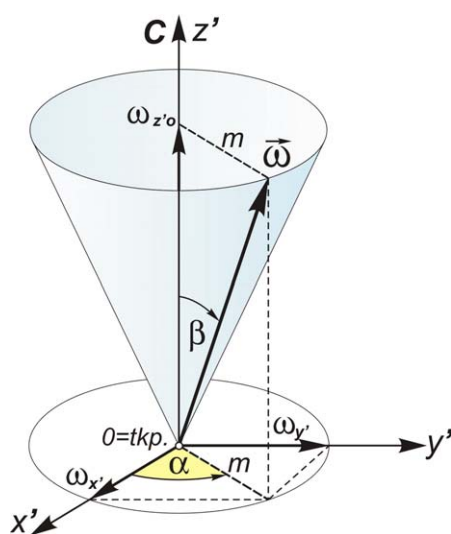


$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cos \alpha \\ m \sin \alpha \\ \omega_{z'0} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Az eddig kapott eredményeket a 4. ábrán foglaltuk össze. Eszerint az  $\vec{\omega}$  vektor összetevőiben szereplő  $\alpha$  nem más, mint a  $z'$  koordinátatengely és az  $\vec{\omega}$  vektor által meghatározott síknak az  $x'z'$  síkkal bezárt szöge. Mivel az  $\alpha$  a (14) szerint a  $t$  időnek lineáris függvénye, ezért

$$\frac{d\alpha}{dt} = k\omega_{z'0} = \frac{C-A}{A}\omega_{z'0} = \text{áll.} \quad (16)$$

tehát az  $\vec{\omega}$  vektor állandó szögsebességgel járja körül a test tömegéhez rögzített koordinátarendszer  $z'$  tengelyét.



4. ábra. Nutációs mozgás a forgó testhez rögzített koordinátarendszerből szemlélve.

Az  $\vec{\omega}$  (15) összetevőit megvizsgálva látható, hogy az  $\vec{\omega}$  vektor végpontja a  $z'$  tengely körül a (16) szerint állandó szögsebességgel

$$m = \sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2},$$

sugarú kört ír le, így maga a forgási szögsebesség-vektor  $\vec{\omega}$  azaz a Föld forgástengelye  $\vec{\omega}$  egy  $2\beta$  nyílásszögű körkúp palástja mentén mozog a tehetetlenségi főtengellyel azonos  $z'$  koordinátatengely körül, ahol

$$\beta = \arctg \frac{m}{\omega_{z'0}}. \quad (17)$$

A Föld forgása tehát nem a  $C$  szimmetriatengely körül (azaz nem a Föld tömegéhez kötött állandó helyzetű  $z'$  tengely-) hanem mindig a *pillanatnyi forgástengely* körül történik. A Föld felszínén az  $\vec{\omega}$  vektor végpontja által leírt kör (a pillanatnyi forgástengelynek a földfelszíni nyomvonala) a *merev Föld póluspályája*, vagy pollódiuma.

Ez az erőmentes szimmetrikus pörgettyű *nutációs mozgásának* lényege a testtel együtt forgó koordináta-rendszerből szemlélve.

Határozzuk meg ezek után a Föld esetében a pillanatnyi forgástengely egy teljes körülvándorlásának idejét. Jelölje  $T_E$  azt az időt, amely alatt a forgástengely egyszer körüljárja a  $z'$  tengelyt; ekkor a (14) alapján:

$$k\omega_{z'0}T_E = 2\pi$$

tehát :

$$T_E = \frac{2\pi}{\frac{C-A}{A}\omega_{z'0}}$$

Mivel a forgás jó közelítéssel a  $z'$  tengely körül történik, ezért  $\omega_{z'0} \approx |\vec{\omega}|$  azaz

$$\frac{2\pi}{\omega_{z'0}} \approx \frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{ csillagnap} = 0.9973 \text{ szoláris nap},$$

tehát:

$$T_E \approx \frac{A}{C-A}.$$

Csillagászati megfigyelések szerint:

$$\frac{A}{C-A} = 0.003295$$

így tehát

$$T_E \approx 303 \text{ nap}.$$

Mivel a mozgásegyenletek fenti levezetése EULERTŐL származik, a forgástengely állandó szögsebességű körbevándorlásának *303 napos* periódusát *Euler-féle periódusnak* (gyakran Euler-féle *szabadnutációs* periódusnak) nevezzük. Az elnevezésben a "szabad" jelző arra utal, hogy a jelenség külső erőhatásoktól teljesen független és a kialakult mozgás periódusidejét kizárólag a merev test (esetünkben a Föld) tömegeloszlása határozza meg.

Mindezekből az következik, hogy ha valamely merev test tengelykörüli forgása nem a  $C$  főtehetetlenségi nyomaték tengelye körül indult meg, akkor ez a mozgási állapot megmarad, tehát a forgástengely nem billen vissza olyan állapotba, hogy a főtehetetlenségi tengellyel egybeessék. Ekkor viszont a pillanatnyi forgástengely állandó szöggel hajlik a főtehetetlenségi tengelyhez, miközben állandó sebességgel járja körül.

Amikor a forgástengely pontosan egybeesik a szimmetriatengellyel ( $\beta = 0$ ), vagy az  $A = B = C$  esetén a mozgás ugyan olyan mint egy rögzített tengely körüli állandó szögsebességű forgás, azaz nutáció nem lép fel.

Mindez, amit eddig tárgyaltunk, a Földdel együtt forgó  $K'$  koordinátarendszerből szemlélve látható. A következő feladat az Euler-szögek meghatározása, ami lehetővé teszi az erőmentes szimmetrikus pörgettyű nutációs mozgásának leírását külső inerciarendszerből szemlélve.

Induljunk ki a (8) differenciálegyenletekből! Ezeknek elegendő egy partikuláris megoldása, mivel az általános megoldásban szereplő három integrációs állandót a  $K$  koordinátarendszer szabad választásával automatikusan megadjuk (BUDÓ, 1964). Vegyük fel a térhez rögzített  $K$  koordinátarendszerünk  $z$  tengelyét a 3. ábrán szemléltetett módon úgy, hogy iránya megegyezzen az (1) miatt a térben állandó helyzetű  $\mathbf{N}$  impulzusnyomaték vektor irányával, továbbá tételezzük fel, hogy a  $z$  és a  $z'$  irányok közötti  $\vartheta$  szög nagysága időben nem változik, tehát

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{áll.} \quad (18)$$

Ekkor behelyettesítve a (8) differenciálegyenletekbe a (10), (12) és a (13) megoldásokat

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta_0 \sin \varphi &= m \cos[(k\omega_{z'0})t + \tau] \\ \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta_0 \cos \varphi &= m \sin[(k\omega_{z'0})t + \tau] \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta_0 + \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_{z'0} \end{aligned} \right\} . \quad (19)$$

Az első két egyenletből a koordinátarendszerek 3. ábrán látható értelmezése mellett (BUDÓ, 1964) szerint az alábbi két összefüggés adódik:

$$\frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta_0 = m$$

és

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (k\omega_{z'0}t + \tau) .$$

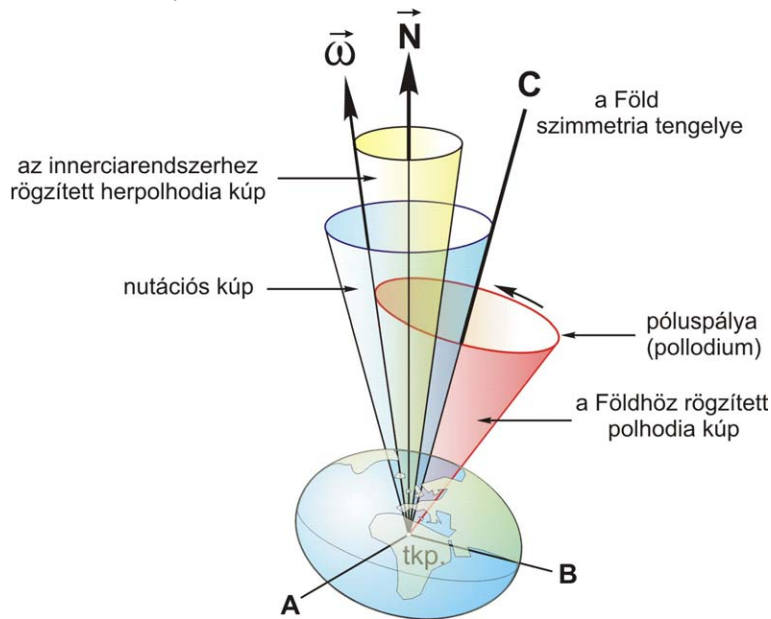
Beírva ezeket a (19) harmadik egyenletébe, kiszámítható a  $\vartheta_0$  értéke:

$$\text{tg} \vartheta_0 = \frac{m}{\omega_{z'0}} \frac{A}{C} .$$

Összefoglalva végül az Euler-szögekre kapott megoldást:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 = \arctg\left(\frac{m}{\omega_{z'0}} \frac{A}{C}\right) \\ \psi &= \psi_0 + \frac{m}{\sin \vartheta_0} t \\ \varphi &= \varphi_0 - \frac{C-A}{A} \omega_{z'0} t \end{aligned} \right\} . \quad (20)$$

Az első két összefüggés azt mutatja, hogy külső inerciarendszertől szemlélve az erőmentes pörgettyű  $C$  szimmetriatengelye a térben állandó helyzetű  $\mathbf{N}$  impulzusnyomaték vektor körül  $2\vartheta_0$  nyílásszögű ún. nutációs kúp palástja mentén állandó  $m/\sin \vartheta_0$  szögsebességgel mozog körbe, miközben a harmadik egyenlet szerint ehhez még hozzájön egy további forgás a  $C$  szimmetriatengely körül. Az  $\mathbf{N}$  vektornak a  $C$  szimmetriatengellyel bezárt  $\vartheta_0$  szögét a (20) első összefüggése, míg a  $C$  szimmetriatengelynek az  $\omega$  pillanatnyi forgástengellyel bezárt  $\beta$  szögét pedig a (17) összefüggés adja. Ebből viszont az  $\omega$  pillanatnyi forgástengelynek az  $\mathbf{N}$  vektorral bezárt  $\gamma$  szöge is meghatározható. Két alapeset lehetséges: a  $C > A$  esetben  $\gamma = \beta - \vartheta_0$ , míg a  $C < A$  esetben  $\gamma = \vartheta_0 - \beta$ .



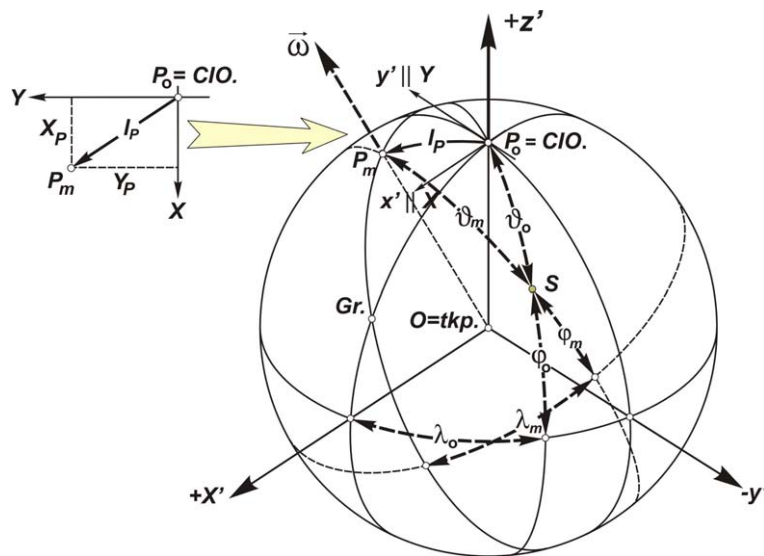
5. ábra. Az Euler-féle szabadnutáció inerciarendszertől szemlélve.

Összefoglalva a fentieket: a *szabadnutáció* esetén a külső térben rögzített koordinátarendszerben (a  $K$  inerciarendszerben) mind a Föld forgástengelyének, mind a Föld  $C$  szimmetriatengelyének az iránya folyamatosan változik, csupán az  $\mathbf{N}$  impulzustengely

iránya változatlan, az impulzusnyomaték (1) szerinti megmaradási törvénye értelmében. A mozgást legegyszerűbben az 5. ábra alapján érthetjük meg  $\vec{E}$  ami egyébként az erőmentes pörgettyű szabadnutációs mozgását mutatja a külső térben rögzített inerciarendszertől szemlélve. A Föld pillanatnyi forgástengelye (a  $C > A$  esetén) a kisebb nyílásszögű ún. herpolhoida kúp palástja mentén, a  $C$  szimmetriatengely (a Föld tehetetlenségi főiránya) pedig a nagyobb nyílásszögű ún. nutációs kúp palástja mentén kerüli meg az  $\mathbf{N}$  impulzusnyomaték vektort. Eközben az  $\vec{\omega}$  vektor az ún. polhodia kúp palástja mentén a  $C$  tengely körül is vándorol. A mozgás során az  $\vec{\omega}$ , az  $\mathbf{N}$  és a  $C$  mindig egy síkban van, miközben a Föld tömegéhez rögzített helyzetű polhodia kúp és az inerciarendszerben rögzített helyzetű herpolhoida kúp palástja állandóan az  $\vec{\omega}$  vektor iránya mentén érintkezve csúszásmentesen gördül egymáson.

### A pólusmozgás megfigyelése

A Föld forgástengelyének a tömegéhez viszonyított elmozdulása abban nyilvánul meg, hogy a pontok földrajzi koordinátái: a földrajzi szélesség és a hosszúság periódusos változást mutatnak. A pólus helyzetének megváltozásáról tehát a megfigyelő állomások  $\varphi$  szélességének és  $\lambda$  hosszúságának  $\ddot{E}$  illetve a szélesség pótszögének a sarkmagasságának  $\ddot{E}$  a megváltozása révén szerezhetünk tudomást. Ennek megfelelően a 6. ábrán látható  $l_P$  nagyságú pólus-elmozdulás esetén a  $t = 0$  időpontban az  $S$  megfigyelési hely eredetileg  $\varphi_0, \lambda_0$  koordinátái helyett a  $t = m$  időpontban  $\varphi_m, \lambda_m$  értékek mérhetők.



6. ábra. Valamely  $S$  pont koordinátaváltozása a pólusmozgás következtében.

A Föld pillanatnyi forgástengelyének mozgását, a pólusmozgást a Föld tömegéhez rögzített  $K'$  koordinátarendszerben írhatjuk le. Mivel a pólus elmozdulása a Föld méreteihez

viszonyítva rendkívül kicsi, ezért a 6. ábrán látható  $x', y', z'$  térbeli derékszögű geocentrikus (balsodrású) koordinátarendszer helyett a  $CIO$  kezdőpontú  $X, Y$  síkkoordináta-rendszert alkalmazzuk; amelynek  $X$  és  $Y$  tengelye párhuzamos az előbbi geocentrikus koordinátarendszer  $x'$  és  $y'$  tengelyével. Ebben az  $X, Y$  koordinátarendszerben a pillanatnyi forgástengelyhez tartozó  $P_m$  pólushely a  $P_0$  ponttól (pl. a  $P_0 \equiv CIO$  középpólustól)  $l_p(X_p, Y_p)$  távolságra van. Kiszámítható, hogy a 6. ábrán látható  $S$  pont  $\varphi_0, \lambda_0$  koordinátáinak  $\Delta\varphi, \Delta\lambda$  megváltozása a pólus  $X_p, Y_p$  elmozdulásának hatására:

$$\Delta\varphi = \varphi_m - \varphi_0 = X_p \cos \lambda_0 + Y_p \sin \lambda_0 \quad (22)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_m - \lambda_0 = (X_p \sin \lambda_0 + Y_p \cos \lambda_0) \tan \varphi_0 \quad (23)$$

Több megfigyelőállomáson végzett  $\Delta\varphi$ , illetve  $\Delta\lambda$  meghatározások alapján, a (22), illetve a (23) felhasználásával, legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel a keresett  $X_p, Y_p$  póluskoordináták kiszámíthatók.

A (22) összefüggés felhasználásával számított póluskoordináták szórása azonban a vártnál lényegesen nagyobbak adódtak, ezért az összefüggést egy további taggal kiegészítve módosították:

$$\Delta\varphi = X_p \cos \lambda_0 + Y_p \sin \lambda_0 + z \quad ,$$

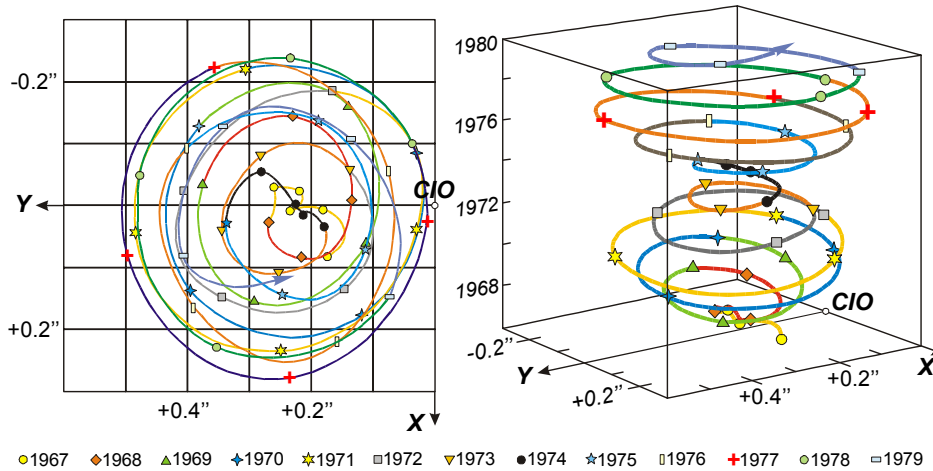
ahol  $z$  az ún. KIMURA-féle tag. Jelenléte arra utal, hogy az egyes földi állomások szélességének változásában mutatkozó ingadozások nem tisztán a pólus mozgásából erednek. A vizsgálatok szerint a Kimura-féle tagban kétféle hatás összegeződik: az egyik minden állomásban közös, a másik az egyes állomások egyéni jellemzője. Az utóbbi a helyi refrakcióviszonyokkal és a kérdéses helyet magán viselő földkéreg-darab horizontális mozgásával, esetleg a nehézségi erőter időbeli változásával hozható kapcsolatba.

### A pólusingadozás valódi periódusa

A valódi Föld pillanatnyi forgástengelyének a fötetheletlenségi irányát jól közelítő (megállapodással definiált) tengelyéhez viszonyított - mérésekkel meghatározható - mozgását *pólusingadozásnak* nevezzük. Az eddigi feltevések (pl. merev és forgásszimmetrikus Föld esete) a valóságban nem érvényesek, ezért a megfigyelt pólusingadozás jelentősen eltér az elméleti megfontolások fenti eredményeitől.

Ha mérésekkel bármikor meghatározzuk a valódi póluspályát, a *pollodiumot* (a forgástengely mozgásának földfelszíni nyomvonalát) akkor a 7. ábra baloldalán láthatóhoz hasonló képet kapunk. A 7. ábrán az 1967 és 1979 közötti póluspálya látható olyan koordinátarendszerben, amelynek  $+x$  tengelye a greenwichi kezdőmeridián irányába,  $+y$  tengelye pedig erre merőlegesen, nyugat felé mutat; a kezdőpontja pedig az 1900 és 1905 közötti időtartamra meghatározott közepes pólushely: a *CIO* (Conventional International Origin). Látható, hogy a pólus valóban periodikus mozgást végez, a pólus elmozdulása kb.  $0.5'' \approx 10m$  sugarú körön belül marad, de az amplitúdó nem állandó és a

periódus sem egyenlő az Euler-féle 303 napos periódussal, hanem ennél lényegesen hosszabb: 405 és 457 nap között ingadozik  $\bar{\epsilon}$  átlagosan mintegy 435 nap.

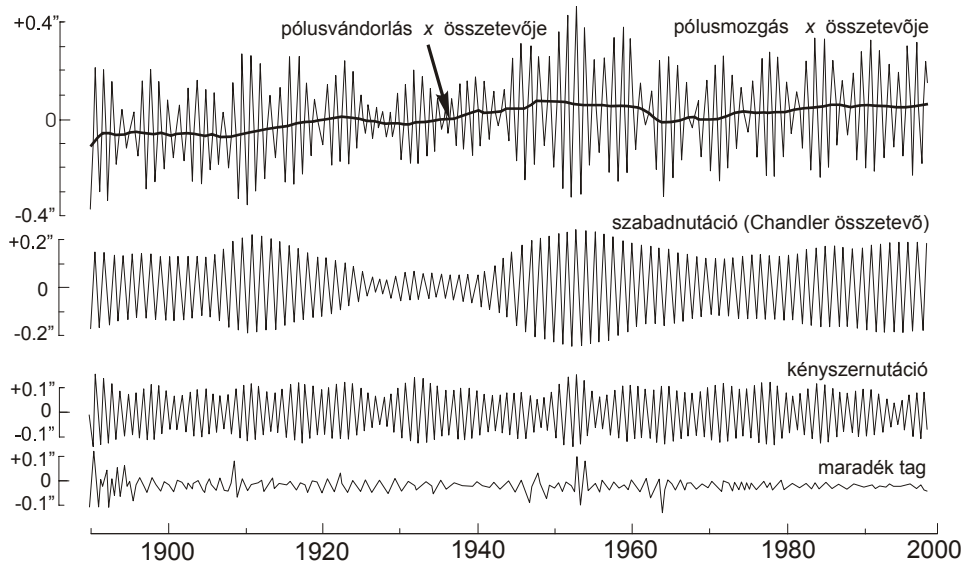


7. ábra. A póluspálya 1967-1979 között.

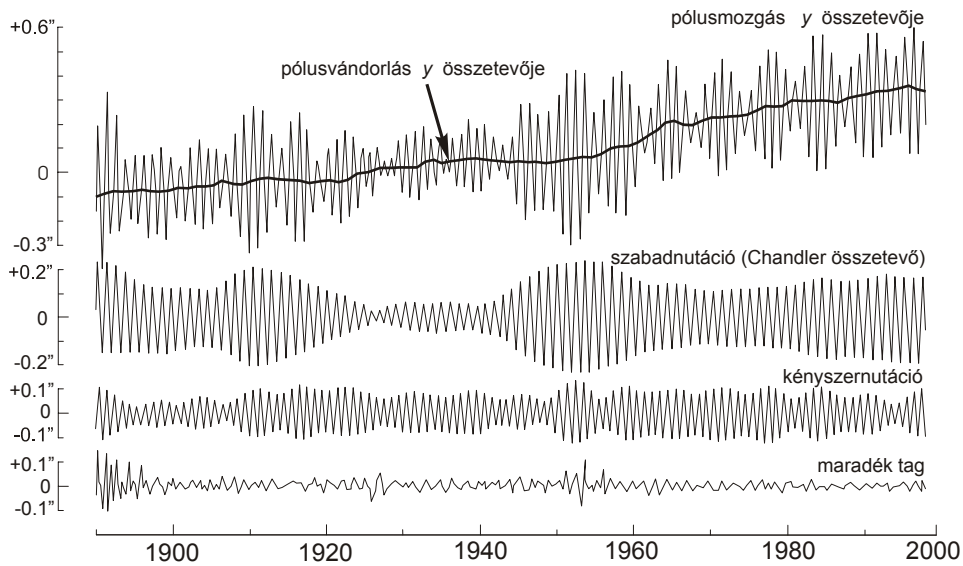
A pólusmozgás felfedezése utáni években CHANDLER amerikai csillagász kimutatta, hogy a pólusmozgás két domináns periódusból, egy 12 és egy 14 hónapos periódusból tevődik össze (MUNK-MACDONALD, 1960). Az utóbbit tiszteletére *Chandler-periódusnak* nevezték el. Néhány hónappal CHANDLER felfedezése után NEWCOMB már elméleti magyarázattal is szolgált: a 14 hónapos összetevő a Föld *szabadnutációja*, míg a 12 hónapos összetevő az ún. *kényszernutáció*, mely az azonos periódusú globális meteorológiai jelenségek (pl. légtömegmozgások, hőtömegek olvadása és újraképződése stb.) következménye.

A 7. ábrán látható, hogy a pólus az óramutató járásával ellentétes irányban többé-kevésbé szabályos spirális pályán mozog. Ezek a spirális pályák kb. hat évenként hasonló jellegűek, a két frekvencia összeadásából kialakuló *lebegés* következtében. Jól látható ez a lebegés a 7. ábra jobb oldalán, a pólusmozgás 1967 és 1979 közötti időszakra vonatkozó 3 dimenziós képén. Ugyancsak ezt szemlélteti a 8. és a 9. ábra is, ahol a felső görbe a pólusmozgás  $x$  illetve  $y$  irányú összetevője, alatta pedig a szétválasztott 14 hónapos, 12 hónapos és a maradék összetevők láthatók. Megállapítható, hogy a szabadnutáció és a kényszernutáció külön-külön is meglehetősen bonyolult folyamat. A Chandler-összetevőn pl. felismerhető egy fél évszázad körüli periódus, amely több más földfizikai folyamatban is jelentkezik, okát azonban egyelőre nem ismerjük.

Az átlagosan 427 napos Chandler-periódus és a 303 napos Euler-periódus közötti különbség oka a Föld rugalmas viselkedése. Ha ugyanis a Föld nem merev  $\bar{\epsilon}$  mint ahogyan Euler feltételezte  $\bar{\epsilon}$  akkor a forgástengely elmozdulásának megfelelően a megváltozó centrifugális erő hatására úgy deformálódik a tömege, hogy a tehetetlenségi főtengele közeledik a forgástengelyhez. (Szélső esetben, ha a Föld folyadékszerűen viselkedne, akkor a tehetetlenségi főtengele teljes mértékben követné a forgástengely elmozdulását  $\bar{\epsilon}$  tehát a periódus végtelen nagy lenne, és így pólusmozgásról nem is lehetne beszélni.)



8. ábra. A pólusmozgás  $x$  összetevője 1890-2000 között.



9. ábra. A pólusmozgás  $y$  összetevője 1890-2000 között.

Ennek megfelelően a  $T_E$  Euler-féle, és a  $T_C$  Chandler-periódus hányadosa kapcsolatba hozható a Föld rugalmasságát jellemző Love-féle  $k$  számmal:



$$\frac{T_E}{T_C} = 1 - k \frac{m}{2f - m} \tag{21}$$

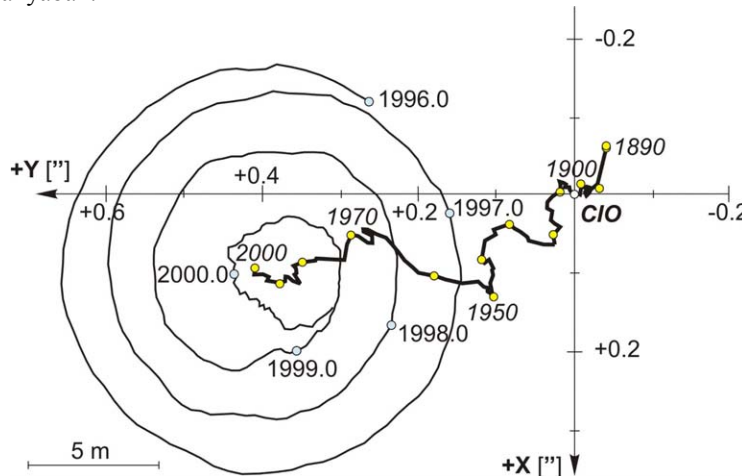
ahol  $f$  a Föld geometriai lapultsága,  $m$  pedig a centrifugális és a nehézségi gyorsulás egyenlítői értékének hányadosa (BÜTTNER, 1979). Az 1. táblázatban a (21) összefüggés alapján kiszámított, néhány szóba jöhető  $k$  értékhez tartozó Chandler-periódus hosszát tüntettük fel. A táblázatból látható, hogy a szabadnutáció Chandler-periódusa annál hosszabb, minél kevésbé merev a Föld. Az árapály jelenségek megfigyeléséből származó 0.29 és 0.31 közötti  $k$  értéknek 440 és 454 nap közötti periódus felel meg, viszont a pólusmozgás megfigyeléséből a 428-440 nap közötti Chandler-periódus tűnik a legvalószínűbbnek, amihez a táblázat adatai szerint  $k = 0.27-0.29$  érték tartozik (BÜTTNER, 1979).

1 táblázat. A Föld rugalmassága és a Chandler-periódus hossza közötti összefüggés.

$k$	0	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32
$T_C$ [nap]	303	421	428	434	440	447	454	461

### 6.2.3 A pólusvándorlás

Ha meghatározzuk egy-egy teljes periódushoz a 7. ábrán látható póluspályák közepes pólushelyzeteit, akkor azt tapasztaljuk, hogy ezek a közepes pólushelyek az idő függvényében folyamatosan eltolódnak. A jelenséget szekuláris pólusmozgásnak, vagy *pólusvándorlásnak* nevezzük. A 10. ábrán látható, hogy pl. az 1890 és 2000 közötti póluspálya már teljes egészében az 1900 és 1905 között meghatározott CIO középpóluson kívül halad. Az ábrán látható, hogy a közepes pólus 110 év alatt több mint 10m-t mozdult el Kanada irányában.



10. ábra. A pólus vándorlása 1890 és 2000 között.

A megfigyelések szerint a pólusvándorlás mértéke viszonylag csekély,  $\ddot{E}$  évente legfeljebb néhány  $dm$  (néhány ezred szögmásodperc) nagyságrendű  $\ddot{E}$  a földtörténeti időskálán

azonban ez az elmozdulás jelentős (több  $10^9$ ) mértékű is lehet. Ezért a pólusvándorlás problémája a geológia és a geofizika sokat tárgyalt kérdése; különösen a paleoklimatológiai és újabban néhány globális tektonikai kérdés megválaszolása szempontjából igen fontos.

### A pólusmozgás geodéziai és csillagászati hatása

Kizárólag a pólusmozgás hatását figyelembe véve az  $\vec{\omega}$  forgási szögsebesség-vektornak az állócsillagokhoz viszonyított helyzetét gyakorlatilag állandónak tekinthetjük. Ekkor viszont állandó az égi egyenlítő síkjának helyzete is, tehát a csillagok saját mozgásától eltekintve, ezek égi egyenlítői (ekvatoriális) koordinátái az időben változatlanok.

Ugyanakkor a Föld felszínén fekvő pontoknak a forgástengelyhez viszonyított helyzete a Föld tömegének a forgástengelyhez viszonyított elmozdulásával folyamatosan változik, így a pontok szintfelületi földrajzi koordinátái is folyamatosan változnak (BIRÓ, 1971).

### A pólusmozgás oka

A pörgettyűmozgás elmélete szerint a szabad tengely körül forgó merev testek helyzete akkor stabil, ha a forgás megindulásakor a test forgástengelye megegyezik a tehetetlenségi főtengelyével. Ellenkező esetben, vagyis ha a forgás nem a tehetetlenségi főtengely körül indul meg, akkor a forgó test helyzete  $\vec{E}$  erőmentes térben is  $\vec{E}$  állandóan változik, azaz a test szabadnutációs mozgást végez. Így ha valamely merev bolygó esetében valamikor kialakult a szabadnutációs mozgás, akkor ennek fenntartásához semmiféle mechanizmusra nincs szükség.

Mivel a Föld nem merev test, rá ez a megállapítás nem érvényes. A Föld esetében a minimális mozgási energiájú állapot a tehetetlenségi főtengely körüli forgás. Ettől eltérő helyzetű forgástengely esetén olyan belső tömegátrendeződések lépnek fel, amelyek a két tengely közeledését illetve egybeesését igyekeznek előidézni. A Chandler-összetevő vizsgálata alapján az a csillapítási idő, amely alatt a mozgás amplitúdója  $e$ -ed részére csökken kb. 10-30 év közötti értékre becsülhető (BÜTTNER, 1979). Az ennél jóval hosszabb idejű megfigyelések azt bizonyítják, hogy léteznie kell valamilyen gerjesztő folyamatnak, amely a pólusmozgás ismeretlen módon elnyelődő energiáját valamilyen formában pótolja.

A lehetséges disszipációs és gerjesztési folyamatok napjainkban még tisztázatlanok, mivel az eddig felmerült lehetőségek általában más módon nehezen ellenőrizhetők és a számítások igen bonyolultak.

*A fentiek szerint az viszont nyilvánvaló, hogy a Föld nutációs mozgásának oka a Föld bonyolult belső tömegeloszlása és a tömegek állandó mozgása, áthelyeződése. A Földön kívüli tömegek eloszlásának, a különböző égitesteknek a pólusmozgásra semmilyen hatása nincs!*

### Megjegyzés

A Föld forgásával kapcsolatos kutatásaink az MTA Fizikai Geodézia és Geodinamika Kutatócsoport, valamint a T-038123 és a T-037929 sz. OTKA anyagi támogatásával folytak. A támogatást ezúton is köszönjük.

## Hivatkozások

- Biró P** (1971): A felszínmozgások vizsgálata és a Föld geodinamikai folyamatai. *Geodézia és Kartográfia*, 29. 9-18.
- Budó Á** (1964): Mechanika. *Tankönyvkiadó*, Budapest.
- Budó Á, Pócsa J** (1965): Kísérleti Fizika. *Tankönyvkiadó*, Budapest.
- Büttner, Gy.** (1978): Pólusingadozás. Csillagászati évkönyv 1979, 224-247. *Gondolat Kiadó*, Budapest.
- Landau LD, Lifsic EM** (1974): Elméleti Fizika I. *Tankönyvkiadó*, Budapest.
- Munk WH, Macdonald GJF** (1976): The rotation of the Earth. Cambridge *University Press*, Cambridge.
- Völgyesi L** (1999): Geofizika. *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- Völgyesi L** (2002): A Föld precessziós mozgásának fizikai alapjai. *Geomatikai Közlemények V.*, Sopron.

\* \* \*

Völgyesi L. (2003) [A pólusmozgás fizikai alapjai](#). *Geomatikai Közlemények V*, pp. 56-73.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.  
Web: <http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi> E-mail: [volgyesi@eik.bme.hu](mailto:volgyesi@eik.bme.hu)